Borys Wróblewski

Raport i dokumentacja
Obliczanie Value-at-Risk portfela metodą Monte Carlo

1. Opis problemu

Celem pracy jest policzenie jednodniowej wartości narażonej na ryzyko (Value-at-Risk) portfela składającego się z składającego się z akcji oraz krótkich i długich pozycji opcyjnych. Do rozwiązania tego problemu zastosowano i porównano dwie metody:

- Symulacji Monte Carlo
- Delta-Gamma aproksymacji przy użyciu metod Monte Carlo.

Rozwój rynków finansowych wpłynął na rozprzestrzenienie się instrumentów pochodnych – potężnego narzędzia służącego do zabezpieczeń jak i spekulacji. Pozwalają one na minimalizację ryzyka ale nieumiejętnie stosowane są w stanie narazić na gigantyczne straty.

Zważywszy na fakt, że początkowa wartość kontraktu może być bardzo niska (a nawet zerowa), nie oddaje ona charakteru możliwych wypłat z kontraktu. Pojawił się więc w oczywisty sposób problem mierzenia ryzyka związanego z otwartą pozycją na rynku instrumentów pochodnych.

Podstawowym i najczęściej stosowanym narzędziem jest Value-at-Risk (VaR). Formalnie VaR definiuje się następująco:

$$VaR_c(L) = \inf\{x : P(L > x) \le 1 - c\} = \inf\{x : F_L(x) \ge c\} \tag{1}$$

Gdzie:
L – zmienna losowa określająca stratę
c – poziom ufności

Innymi słowy: *VaR* na poziomie ufności *c* możemy interpretować następująco: prawdopodobieństwo, że strata z portfela przekroczy w danym horyzoncie czasowym poziom *VaR* wynosi 1 – *c*. Value-at-Risk możemy więc utożsamiać z kwantylem rozkładu. W praktyce bankowej stosuje się poziomy istotności *c* = 0,95 ; 0,99 ; 0,995 .

VaR ma zasadnicze znaczenia przy ocenie ryzyka portfeli z bardzo skomplikowaną strukturą ze skomplikowanymi instrumentami pochodnymi, których wypłaty mogą być dodatkowo ze sobą skorelowane. *VaR* jest miarą, która w syntetyczny sposób określa ekspozycję na czynniki ryzyka.

Dodatkowo program oblicza inną miarę ryzyka *Expected Shortfall*, którą definiuje matematyczna formuła:

$$ES_c(L) = E(L \mid L > VaR_c(L)) \tag{2}$$

Jest ona większa od VaR i określa ile średnio stracimy jeżeli strata przekroczy poziom VaR. Miara ta lepiej oddaje własności ogonów rozkładu oraz ma matematycznie lepsze własności: jest podaddytywna czyli w przeciwieństwie do VaR jest koherentną miarą ryzyka.

1.1. Dane

W moim projekcie postanowiłem policzyć Value-at-Risk portfela składającego się z akcji spółek notowanych na GPW oraz z opcji na indeks WIG 20.

Wybrałem 9 spółek:Agora, Bank BPH, Barlinek, BZWBK, GTC, Kredyt Bank, Pekao, PKN Orlen, Żywiec.

Estymację postanowiłem przeprowadzić na rocznej próbie: 15.04.2008 – 14.04.2009. Przy liczbie obserwacji: 249.

Dane zostały pobrane z portalu bossa.pl. Dane znajdują się w pliku Akcje.xls. Zostały one wyeksportowane do pliku w formacie txt i są pobierane przez Octavo z Akcje.txt.

W badaniu VaR pierwszym krokiem jest zidentyfikowanie czynników ryzyka. W moim prostym modelu są to oczywiście ceny akcji 9 spółek oraz wartość indeksu WIG 20 – łącznie 10 czynników ryzyka.

1.2 Opis danych wejściowych

Zważywszy na sporą ilość danych wprowadzanych do programu, są one wprowadzane do Octave'a w kilku plikach tekstowych:

a) `Akcje.txt` – zawiera wartości indeksu WIG20 oraz ceny akcji na zamknięciu kolejnych dziennych notowań z wyżej wymienionego okresu. Notowania są w kolejności:

WIG20	ZYWEC	KREDYTB	BARLINEK	PKNORLEN	PEKAO	GTC	BZWBK	BANKBPH	AGORA

b) `Wagi.txt` – zawiera ilości (w jednostkach) akcji w portfelu. Liczby oddzielone tabulatorami odpowiadają kolejnym instrumentom z powyższej tabeli. Zakładamy tu możliwość kupowania jednostek indeksu za kwotę równą wartości WIG20 (np. do celów sprawdzenia strategii łączonych opcje z instrumentem bazowym). Możliwe są krótkie pozycje na akcjach.

c) `Opcje.txt` – Plik zawiera informacje o opcjach zawartych w portfelu.

Pierwsza kolumna zawiera informacje o cenach opcji w dniu 14 kwietnia 2009. Ceny opcji na WIG20 są notowane w punktach bazowych. Każda opcja ma mnożnik 10, czyli cena każdej opcji w złotówkach jest 10 razy większa, jak i wypłata z opcji: jest to różnica między strikiem a ceną w dniu wykonania pomnożona przez 10.

Kolejna kolumna to ceny wykonania opcji. Następnie, kolejno: data zapadalności i ilość dni od 14 kwietnia do terminu zapadalności.

Przedostatnia kolumna zawiera informację o typie opcji: 1 dla opcji put 0 dla opcji call.

Ostatnia kolumna określa ilość opcji w portfelu (pamiętamy tu, że każda opcja ma mnożnik 10). Ujemna wartość oznacza krótką pozycję opcyjną.

d) `Dane.txt` – Zawiera pozostałe używane do obliczeń dane.

`r` – stopę wolną od ryzyka

`h` – szerokość pasma przy estymacji jądrowej

`c` – wartość poziomów ufności dla którego liczymy VaR i ES

`sgm0` – zmienność początkowa, od której algorytm zacznie szukać rozwiązania

`K_MC, K_DGMC` – liczba symulacji.

1.3. Opis funkcji

a) `BS_call(s0,r,sgm,T,K)`
Zwraca cenę opcji call z modelu Blacka-Scholesa (BS) gdzie:
`s0` – wartość początkowa instrumentu bazowego
`r` – stopa wolna od ryzyka (kapitalizacja ciągła)
`sgm` – zmienność
`T` – czas od wygaśnięcia opcji w latach
`K` – cena wykonania opcji

b) `BS_put(s0,r,sgm,T,K)`
Zwraca cenę opcji put z modelu BS przy analogicznych oznaczeniach

c) `BS_delta_call(s0,r,sgm,T,K)`
Zwraca współczynnik delta opcji call z modelu BS przy analogicznych oznaczeniach.

d) `BS_delta_put(s0,r,sgm,T,K)`
Zwraca współczynnik delta opcji put z modelu BS przy analogicznych oznaczeniach.

e) `BS_gamma(s0,r,sgm,T,K)`
Zwraca współczynnik gamma opcji z modelu BS przy analogicznych oznaczeniach.

f) `BS_vega(s0,r,sgm,T,K)`
Zwraca współczynnik vega opcji z modelu BS przy analogicznych oznaczeniach.

g) `Implied_vol(typ,s0,r,sgm0,T,K,P,epsilon)`
Zwraca przybliżoną wartość zmienności implikowanej opcji wynikającą z modelu BS. Zmienność ta jest przybliżana metodą Newtona-Rhapsona. Oznaczenia analogiczne oraz:
`typ` – oznacza typ opcji: call `typ='c'` bądź put `typ='p'`
`sgm0` – zmienność początkowa, od której algorytm zacznie szukać rozwiązania
`P` – rynkowa cena opcji
`epsilon` – algorytm przewie szukanie rozwiązania gdy różnica między kolejnymi przybliżeniami będzie mniejsza niż `epsilon`.

h) `VaR_MC(Z,SigmaLog,S0,r,Opcje,Wagi,c,m,n,K,epsilon,h,sgm0)`
`Z` – macierz K*n zmiennych losowych N(0,1)
`SigmaLog` – macierz kowariancji log-zwrotów instrumentów bazowych
`S0` – wektor cen instrumentów bazowych w momencie 0
`Opcje`- macierz z danymi wejściowymi o opcjach
`Wagi` – wektor wag portfela
`c` – wektor poziomów ufności, dla których ma zostać policzony VaR
`m` – liczba serii opcji (=6)
`n` – liczba akcji (=10)
`K` – liczba symulacji
`epsilon` – parametr wykorzystywany przyobliczaniu zmienności implikowanej
`h` – bandwidth wykorzystywany przy estymacji jądrowej gęstości (przy szacowaniu przedziałów ufności)

`sgm0` – Zmienność od której zaczyna się liczenie zmienności implikowanej

Funkcja zwraca wartości VaR (pierwszy wiersz) i ES (drugi wiersz) obliczone metodą Monte Carlo dla każdego z podanego poziomu ufności *c*.

Trzeci i czwarty wiersz to odpowiednio dolny i górny 95% przedział ufności dla VaR. Szczegóły działania w dziale opis algorytmu.

i)`VaR_DGMC(Z,SigmaDelty,S0,r,Opcje,Wagi,c,m,n,K,epsilon,h,sgm0)`
`SigmaDelty`- Macierz kowariancji zmian cen

Funkcja zwraca wartości VaR i ES obliczone metodą Delta-Gamma Monte Carlo dla każdego z podanego poziomu ufności *c*.
Trzeci i czwarty wiersz to odpowiednio dolny i górny 95% przedział ufności dla VaR
Szczegóły działania w dziale opis algorytmu.

j) `f(u,h)`
`u` – argument
`h` – szerokość pasma
Funkcja jądra Gaussowskiego

2. Opis algorytmu

2.1. Metoda Monte Carlo

Pierwszym krokiem algorytmu po wczytaniu danych jest obliczenie logarytmicznych stóp zwrotu wartości instrumentów bazowych. Wyniki zostają zapisane w zmiennej `LogReturns`. Kolejnym krokiem jest estymacja macierzy kowariancji między stopami zwrotów. Korzystając z funkcji `cov()` zapisujemy wyniki w pliku `SigmaLog`.

Naszym celem będzie wygenerowanie trajektorii w którą stronę mogą podążyć ceny instrumentów bazowych. W tym celu musimy wygenerować macierz `ZCov` rozmiaru K x n liczb z rozkładu normalnego o średniej 0 i macierzy kowariancji `SigmaLog`. W związku z tym tworzymy macierz A będącą macierzą dolną trójkątną rozkładu Choleskiego macierzy kowariancji. Macierz `Zcov=A*Z` gdzie Z jest macierzą liczb z rozkładu N(0,1) składa się z K obserwancji wektora n-wymiarowego (u nas 10), którego wiesze pochodzą z rozkładu N(0,SigmaLog).

Kolejnym krokiem jest wygenerowanie wartości czynników ryzyka w następnym okresie. W tej metodzie dokonałem prostego założenia , że ceny mają rozkład log-normalny – ten sam, który modeluje ceny w modelu Blacka-Scholes'a.

Innymi słowy, w naszym przypadku ceny każdego instrumentu w następnym dniu będą miały postać:

$$S_{k+1} = S_k e^{r*t-\frac{\sigma^2}{2}+ZCov} \tag{3}$$

Gdzie:
t=1/365,
σ^2 – wariancja stóp zwrotu, liczone w skali dziennej, więc nie mnożymy przez t
r – stopa wolna od ryzyka w skali roku
$ZCov$ – zmienna losowa z rozkładu normalnego

Kolejnym i zarazem najważniejszym krokiem jest policzenie wartości portfela w chwili $t+1$. W przypadku portfela składającego się tylko z akcji wystarczy pomnożyć otrzymane wartości instrumentów przez ich ilość w portfelu. Problem pojawia się w przypadku instrumentów pochodnych – musimy oszacować ich wartość w chwili $t+1$.

Mamy dane ceny opcji w chwili t. Znamy też ich w wszystkie parametry poza zmiennością. Możemy na podstawie cen rynkowych i wartości instrumentu bazowego obliczyć zmienności implikowane opcji na chwilę t . Korzystam tutaj z funkcji `Implied_vol`.

Znając zmienność implikowaną, zakładam, że zmienność ta będzie stała w krótkim okresie jednego dnia. Symulując wartości instrumentu bazowego w chwili $t+1$ możemy więc zasymulować wartości opcji na zamknięcie notowań następnego dnia. Korzystamy tutaj ze wzorów Blacka Scholesa. Wynik to wektor `Ceny_opcji` zawierający K symulacji cen opcji.

Algorytm kończy się policzenie wartości portfela dla każdej z K symulacji. Odejmując otrzymane wartości od wartości początkowej portfela otrzymujemy wektor `Strata` zawierający obserwacje zmiennej losowej straty.

Funkcja drukuje na ekran wykres przedstawiający histogram strat. Zwraca również odpowiednie kwantyle rozkładu z wektora c.

Obliczona zostaje również średnia strata przekraczająca poziom VaR. Ponadto korzystając z własności kwantyla próbkowego:

$$\sqrt{n}(\hat{x}_c - x_c) \to \frac{\sqrt{c(1-c)}}{f(x_c)} N(0,1) \tag{4}$$

$f(x_c)$ - gęstość rozkładu w punkcie x_c

Otrzymujemy oszacowanie 95% przedziału ufności dla otrzymanego parametru.

Potrzebne jest tutaj znalezienie gęstości w punkcie VaR. Skorzystałem z estymatora jądrowego gęstości z jądrem Gaussa i szerokością pasma h=0.5 .

2.2 Metoda Delta-Gamma Monte Carlo

Przy obliczaniu VaR tą metodą dokonano znacząco różnych założeń. Pierwszym założeniem, które jest czynione w najprostszej wersji tej metody, to fakt, że ΔS , czyli zmiana wartości instrumentów bazowych, ma rozkład normalny o średniej 0. ΔS nie są stopami zwrotu lecz bezwzględnymi zmianami wartości czynników ryzyka. W związku z tym pierwszym krokiem jest policzenie macierzy kowariancji zmian cen, które zostało dokonane na podstawie cen akcji.

Istotą metody Delta – Gamma jest przybliżenie rozkładu strat rozwijając zmianę wartości portfela w szereg Taylora.

Jeżeli przez V oznaczymy wartość portfela a $\Delta V = -L$ jako zmianę wartości portfela (= – Strata), to :

$$\Delta V \approx \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + \delta^T \Delta S + \frac{1}{2}\Delta S^T \Gamma \Delta S \tag{5}$$

Gdzie:

$$\delta_i = \frac{\partial V}{\partial S_i}, \Gamma_{i,j} = \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j}$$

Mamy więc do czynienia z wartościami delta i gamma dla każdego z czynników ryzyka.

W naszym przypadku krótkiego terminu zakładamy, że pierwszy człon $\frac{\partial V}{\partial t}$ jest równy 0.

Kluczowym zadaniem staję się policzenie wartość delta i gamma portfela. W przypadku portfela składającego się tylko z akcji wektor δ odpowiada ilości akcji w portfelu. Macierz Γ jest równa 0 gdyż zależności między cenami instrumentów bazowych a wartością portfela jest liniowa.

Co innego w przypadku portfela składającego się również z opcji – zależność między cenami instrumentów a wartością portfela przestaje być liniowa.

W przypadku naszego portfela posiadamy opcje tylko na WIG20, pierwszy czynnik ryzyka. Policzone zostały wartość delt dla każdej z opcji (tak jak w poprzednim przypadku korzystamy ze zmienności implikowanej) mnożymy otrzymane wartości przez 10*ilość opcji (10 – mnożnik opcji na GPW). Następnie otrzymaną wartość delta portfela opcyjnego: `10*Delta_opcji*WagiO'` dodano do pierwszego wiersza δ `Delta_portfela`.

Analogicznie w przypadku macierzy Γ, która ma postać:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Gdzie: $\Gamma_{1,1}$ to gamma portfela opcji `Gamma_opcji`.

Kolejnym krokiem jest wygenerowanie liczb losowych ΔS z rozkładu normalnego. W tym celu, analogicznie tworzymy macierz C z rozkładu Choleskiego macierzy kowariancji.

W naszym prostym przypadku – tylko jeden instrument będący instrumentem bzowym opcji, policzenie nie nastręcza problemów numerycznych. W przeciwnym przypadku, należy przekształcić (3) do postaci:

$$L \approx a + b^T Z + Z^T \Lambda Z \qquad (6)$$

Gdzie:

$a = -\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t, b = -C^T \delta,\ \Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$

$\lambda_1, ..., \lambda_n$ - wartości własne macierzy $-\frac{1}{2}\Gamma\Sigma_S$

Σ_S - macierz kowariancji

Otrzymujemy więc wektor strat, na koniec pozostaje narysowanie histogramu i policzenie odpowiednich kwantyli rozkładu.

Oszacowanie przedziałów ufności przebiega w analogiczny sposób.

3. Wyniki

Przeprowadzono szereg obliczeń VaR dla różnych portfeli. Poniżej zostały przedstawione wyniki dla kilku z nich.

3.1. Portfel akcyjny – brak pozycji w opcjach

Załóżmy, że posiadamy następujące ilości akcji

WIG20	ZYWEC	KREDYTB	BARLINEK	PKNORLEN	PEKAO	GTC	BZWBK	BANKBPH	AGORA
0	10	100	23	46	100	20	28	1000	1000

Na koniec 14 kwietnia portfel ten jest wart : 72 625,87 zł.
Dla K=1 000 000 otrzymujemy następujące oszacowania wartości zagrożonej:
Metoda Monte Carlo:

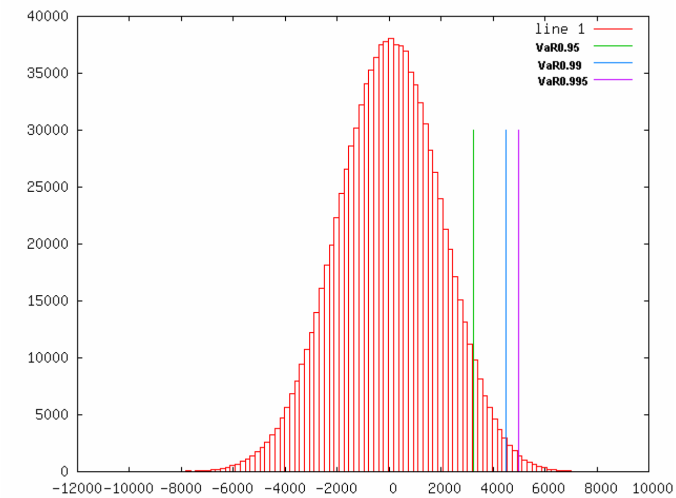
c	VaR	Dolny przedział	Górny Przedział	ES
0.95	3224.3	3217.1	3231.4	4010.3
0.99	4509.1	4501.3	4517.0	5129.2
0.995	4969.6	4954.7	4984.6	5546.7

Metoda Delta-Gamma Monte Carlo:

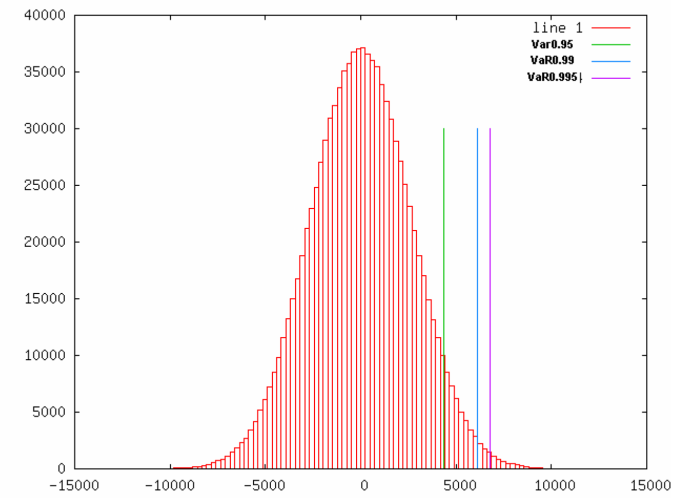
c	VaR	Dolny przedział	Górny Przedział	ES
0.95	4346.6	4336.8	4356.4	5448.6
0.99	6146.1	6132.2	6160.1	7037.2
0.995	6795.0	6786.9	6803.2	7633.3

Widzimy, że wartość z metody DG są wyższy niż ze zwykłego Monte Carlo. Expected Shortfall znacznie przewyższa VaR przy każdym poziomie ufności.

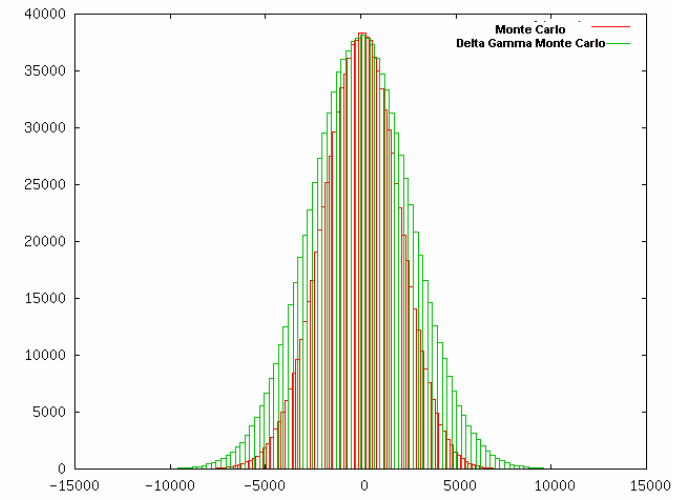
Rys. 1. Histogram strat dla modelu MC



Rys. 2. Histogram strat dla modelu DG MC.



Rys. 3. Porównanie histogramów strat.



Widzimy, że metoda Delta-Gamma w tym przypadku generuje rozkład strat o znacznie grubszych ogonach. Wynikać to może z faktu, że bierze ona pod uwagę bezwzględne zmiany wartości akcji.

Poza tym widzimy, że rozkłady te są względnie symetryczne a przybliżenie ich rozkładem normalnym powinno dać całkiem dobre rezultaty – pokrywa się to z naszą intuicją.

3.2. Portfel akcji z dużą krótką pozycją opcyjną

Załóżmy tym razem, że posiadamy taki sam portfel akcji jak w przykładzie pierwszym ale mamy również otwarte następujące pozycje opcji na indeks WIG20:
Pozycja długa – 5 opcji put, Strike: 1200, 18 wrzesień 2009
Pozycja długa – 5 opcji put, Strike: 1900, 18 wrzesień 2009
Pozycja długa – 5 opcji put, Strike: 1300, 19 czerwiec 2009
Pozycja krótka – 30 opcji put, Strike: 1600, 19 czerwiec 2009
Pozycja krótka – 40 opcji call, Strike: 1900, 19 czerwiec 2009
Pozycja krótka – 40 opcji call, Strike: 2000, 19 czerwiec 2009

Wartość takiego portfela na koniec 14 kwietnia wynosiła: 26995,87 zł
Dla K=1000000 symulacji, otrzymujemy następujące rezultaty:

Metoda Monte Carlo:

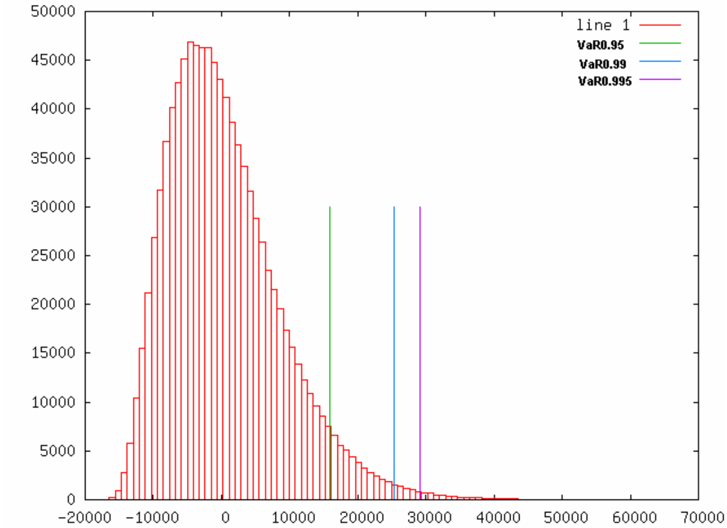
c	VaR	Dolny przedział	Górny Przedział	ES
0.95	15 972	15 926	16 018	21 767
0.99	25 350	25 325	25 375	30 710
0.995	29 183	29 128	29 237	34 384

Metoda Delta-Gamma Monte Carlo:

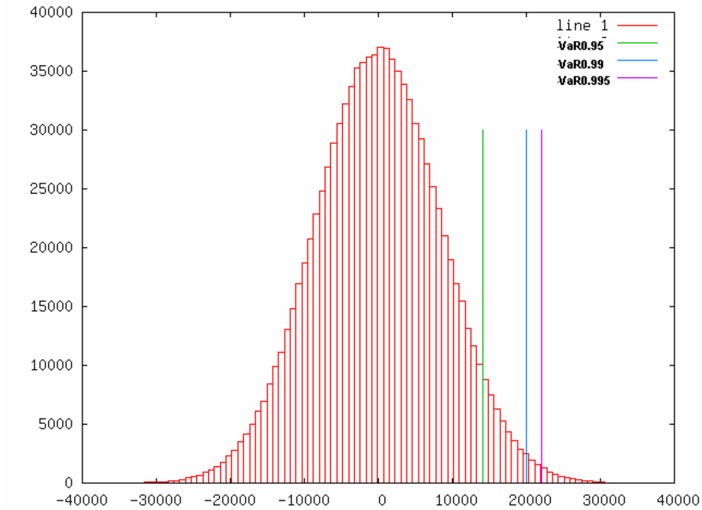
c	VaR	Dolny przedział	Górny Przedział	ES
0.95	14 038	14 005	14 070	17 618
0.99	19 857	19 804	19 910	22 793
0.995	22 026	21 995	22 058	24 738

W tym przypadku sytuacja odwraca się, wyższe wartości pokazuje metoda Monte Carlo. Dzieje się tak na wszystkich poziomach ufności. Warto zwrócić uwagę na fakt, że VaR w niektórych przypadkach przewyższa wartość portfela.

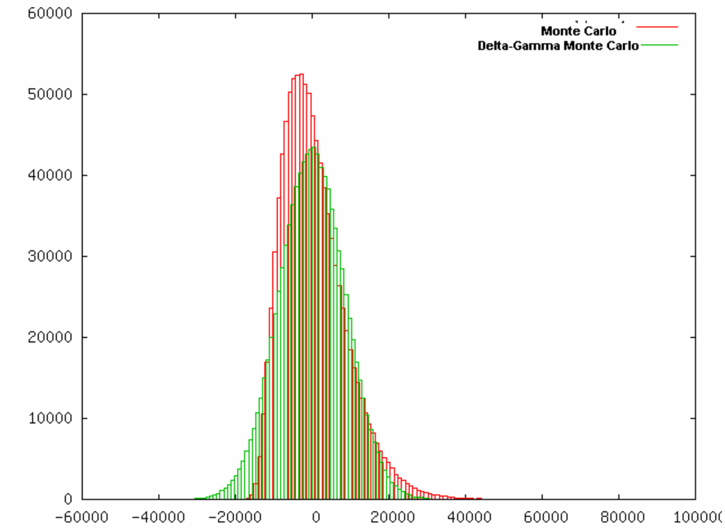
Rys. 4. Histogram strat dla modelu MC



Rys. 5. Histogram strat dla modelu DG MC



Rys. 6. Porównanie histogramów strat



Widzimy tutaj zdecydowane różnice w kształtach histogramów i gęstości rozkładów. W przypadku metody Monte Carlo mamy zdecydowanie rozkład niesymetryczny z bardzo grubym prawym ogonem rozkładu, co zgadza się z intuicją, gdyż otwarta krótka pozycja na opcjach naraża nas na duże ryzyko.

Metoda Delta-Gamma nie wychwytuje w wystarczającym stopniu narażenia na ryzyko i rozkład strat jest zdecydowanie bardziej symetryczny. Widać to na powyższym wykresie.

3.3. Testowanie poprawności obliczeń

W przypadku powyższych metod ciężko jest znaleźć narzędzie testujące pozwalające na dokładne potwierdzenie poprawności obliczeń. Nie ma analitycznych formuł pozwalających weryfikację. Na pierwszy rzut oka, wyniki obu metod zgadzają się z naszą intuicją.

Przeprowadziłem testy sprawdzające poprawność dla portfela składającego się z z jednej akcji dla obu metod. Korzystając z własności kwantyla i VaR:

$$VaR_c(f(L)) = f(VaR_C(L)) \tag{7}$$

Można łatwo sprawdzić, że w przypadku metody Monte Carlo:

$$VaR_c(L) = S_k - S_k e^{rt - \frac{\sigma^2}{2} + \Phi^{-1}(c)} \tag{8}$$

W przypadku metody Delta-Gamma w przypadku jednej akcji będzie to po prostu: c-kwantyl zmiennej losowej o rozkładzie normalnym z wariancją równą wariancji akcji.
(`normal_inv(c,0,SigmaDelty(1,1))`)
W obu powyższych przypadkach wyniki przybliżone były bardzo blisko wyników teoretycznych.

4. Podsumowanie

W projekcie przedstawiono dwie metody obliczania Value-at-Risk. Obliczono jednodniowy VaR dla portfela w dniu 14 kwietnia 2009.

Obie metody dawały różne rezultaty w zależności od charakteru portfela. Metoda Delta-Gamma dawała wyższe wyniki dla portfela akcji, natomiast w przypadku portfela opcji i akcji metoda Monte Carlo z geometrycznym ruchem Browna daje wyższe wartości.

Metoda DG w naszym przypadku zdaje się nie oddawać za dobrze charakteru portfela składającego się z opcji. Rozkład strat mimo zmieniającej się wariancji cały czas jest symetryczny. Można odnieść wrażenie, że przybliżenie szeregiem Taylora jest niewystarczające. Z drugiej strony w metodzie tej zastosowano bardzo naiwny sposób modelowania stóp zwrotu, co mogło zmieć znaczący wpływ na wynik.

Metoda Monte Carlo wydaje się być bardziej uniwersalna i daje wyniki zgodne z intuicją. w szczególności gdy nie dysponujemy analitycznymi wzorami na greki instrumentów pochodnych.