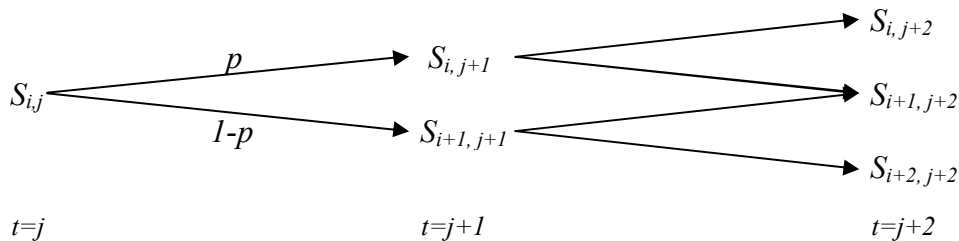


# WYCENA OPCJI EUROPEJSKIEJ I AMERYKAŃSKIEJ W MODELACH DWUMIANOWYCH I TRÓJMIANOWYCH COXA-ROSSA-RUBINSTEINA I JARROWA-RUDDA

Joanna Karska

W modelach dyskretnych wyceny opcji losowość wyrażana jest poprzez wystąpienie skończonej liczby możliwych scenariuszy. Zakłada się przy tym, że rynek jest wielookresowy tzn. cena akcji zmienia się w chwilach  $1, 2, \dots, T$ , gdzie  $T$  to czas do wygaśnięcia opcji. Najprostszym modelem wyceny opcji jest model dwumianowy, w którym to w każdym okresie może wystąpić jedno z dwóch zdarzeń – przyrost lub spadek ceny akcji. Dokładniej, jeśli w momencie  $t$  cena akcji wynosi  $S_t$ , to w momencie  $t+1$  może wzrosnąć z prawdopodobieństwem  $p$  do  $S_t u$ , gdzie  $u > 1$ , lub spaść do  $S_t d$ , gdzie  $0 < d < 1$ . Graficznie można tę sytuację przedstawić na drzewie dwumianowym, składającym się węzłów, na których wypisane są ceny akcji i strzałek pomiędzy węzłami oznaczających kierunek zmian tych cen:



**Rys. 1.** Drzewo dwumianowe

Węzeł  $(i, j)$  oznacza  $i$ -ty węzeł w  $j$ -tym okresie. Cena akcji w tym węźle to  $S_{i,j} = S_{0,0} u^i d^j$  dla  $j=0, \dots, N, i=0, \dots, j, S_{0,0} = S_0$ . Wypłata z opcji w  $N$ -tym okresie w  $i$ -tym węźle jest równa:

$$f_{i,N} = F(S_{0,0} u^i d^j) \quad i=0, \dots, N$$

gdzie  $F(\cdot)$  oznacza funkcję wypłaty z opcji. Znając możliwe wypłaty w  $N$ -tym okresie wartość opcji w węźle  $(i, j)$  można wyznaczyć rekurencyjnie z równania:

$$f_{i,j} = e^{-r\Delta t} (p f_{i,j+1} + (1-p) f_{i+1,j+1}) \quad j=0, 1, \dots, N-1, i=0, 1, \dots, j-1$$

Podstawowym zagadnieniem związanym z modelem dwumianowym jest dobranie takich parametrów  $u, d$  oraz  $p$ , aby otrzymać jak najlepsze przybliżenie możliwych ruchów cen akcji. Do kalibracji parametrów wykorzystany zostanie model Blacka-Scholes'a.

## Model Blacka-Scholesa

W modelu Blacka-Scholesa zakłada się, że wartość opcji europejskiej uzależniona jest od:

- początkowej ceny akcji  $S_0$ ,
- ceny realizacji  $K$ ,
- stopy wolnej od ryzyka  $r$ ,
- stopy dywidendy  $q$ ,
- zmienności  $\sigma$ ,
- czasu do zapadalności opcji  $T$

oraz cena akcji wyraża się przez geometryczny proces Wienera:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

gdzie  $\mu = r - q - \frac{\sigma^2}{2}$ .

Z powyższego równania stochastycznego i ze wzoru Ito wynika, że:

$$\ln S_t \sim N(\ln S_0 + \mu t, \sigma^2 t)$$

czyli  $S_t$  ma rozkład lognormalny.

Korzystając z faktu, że gdy  $X \sim N(a, b)$ ,  $Y = e^X$ , to  $EY = e^{a + \frac{b}{2}}$  i  $D^2 Y = e^{2a + b} (e^b - 1)$  otrzymujemy średnią  $ES_t = e^{(r-q)t} S_0$  i wariancję  $D^2 S_t = e^{2(r-q)t} (e^{\sigma^2 t} - 1) S_0^2$ .

Cena opcji europejskiej, o wypłacie  $\max(0, S_T - K)$  w przypadku opcji call,  $\max(0, K - S_T)$  w przypadku opcji put, jest równa:

$$\begin{aligned} C_{call} &= S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \\ C_{put} &= K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1) \end{aligned}$$

gdzie  $N(\bullet)$  oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego oraz

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{i} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Za pomocą pochodnych cząstkowych można zmierzyć zmianę ceny opcji, gdy zmieniają się parametry determinujące cenę. Miary zmian cen opcji nazywane są współczynnikami wrażliwości. Wzory na współczynniki są następujące:

	Opcja call	Opcja put
Delta $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$	$e^{-qT} N(d_1)$	$e^{-qT} (N(d_1) - 1)$
Theta $\theta = \frac{\partial C}{\partial T}$	$-\frac{S_0 \phi(d_1) \sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} + qS_0 N(d_1) e^{-qT} - rKe^{-rT} N(d_2)$	$-\frac{S_0 \phi(d_1) \sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} - qS_0 N(-d_1) e^{-qT} + rKe^{-rT} N(-d_2)$
Gamma $\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$	$\frac{\phi(d_1) e^{-qT}}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$	$\frac{\phi(d_1) e^{-qT}}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$
Vega $v = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$	$S_0 \sqrt{T} \phi(d_1) e^{-qT}$	$S_0 \sqrt{T} \phi(d_1) e^{-qT}$
Rho $\rho = \frac{\partial C}{\partial r}$	$Ke^{-rT} N(d_2)$	$-Ke^{-rT} N(-d_2)$

Tabela 1. Wzory na współczynniki wrażliwości, gdzie  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

## Kalibracja parametrów w modelu dwumianowym

W celu wyznaczenia parametrów  $u$ ,  $d$  i  $p$  przyrównujemy średnią i wariancję ceny z końca okresu modelu dwumianowego do średniej i wariancji w modelu Blacka-Scholesa. Otrzymujemy, że parametry spełniają następujące równania:

$$pu + (1-p)d = e^{(r-q)\Delta t} \quad (\heartsuit)$$

$$pu^2 + (1-p)d^2 = e^{2(r-q+\frac{\sigma^2}{2})\Delta t} \quad (\spadesuit)$$

Skąd dostajemy, że:

$$e^{(r-q)\Delta t} (u+d) - du = e^{2(r-q+\frac{\sigma^2}{2})\Delta t} \quad (\clubsuit)$$

gdzie  $\Delta t$  oznacza długość okresu.

Aby jednoznacznie wyznaczyć  $u$ ,  $d$  i  $p$  potrzebne jest dodatkowe równanie. Można je określić korzystając z modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina lub modelu Jarrowa-Rudda. Pierwszy z nich zakłada, że  $ud=1$ , a drugi ustala wartość  $p=\frac{1}{2}$ .

## Model Coxa-Rossa-Rubinsteina

Model CRR zakłada, że  $ud=1$ . Korzystając z tej tożsamości i równania  $\clubsuit$  otrzymujemy:

$$u = A + \sqrt{A^2 - 1}$$

$$d = A - \sqrt{A^2 - 1}$$

gdzie  $A = \frac{1}{2} [e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t}]$ .

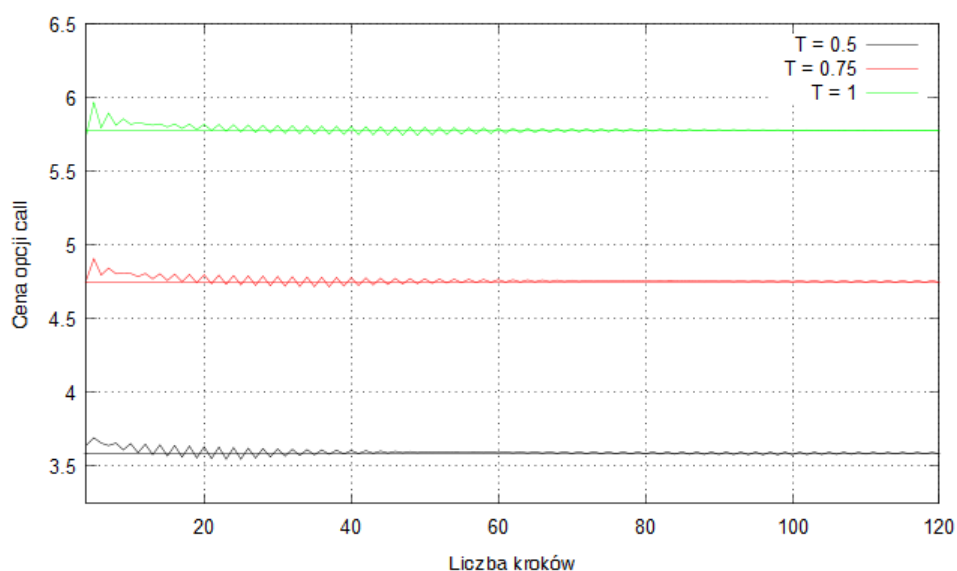
Wartości  $u$  i  $d$  to w przybliżeniu:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Opcja	Model CRR call	Model BS call	Model CRR europejska put	Model BS europejska put
Cena	5.78	5.77	5.01	5.0
$\Delta$	0.566	0.566	-0.424	-0.423
$\theta$	-3.902	-3.882	-1.225	-1.206
$\gamma$	0.028	0.028	0.028	0.028
$\nu$	21.534	21.366	21.534	21.366
$\rho$	25.353	25.388	-28.327	-28.293

**Tabela 2.** Porównanie modeli Coxa-Rossa-Rubinsteina i Blacka-Scholesa dla danych:  
 $S_0=55$ ,  $K=57$ ,  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $T=1$  i  $N=100$ .



**Rysunek 2.** Cena opcji call w modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina dla danych:  
 $S_0=55$ ,  $K=57$ ,  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ .

Liczba kroków	T=0.25	0.5	0.75	1
4	2.264	3.644	4.766	5.751
16	2.208	3.640	4.802	5.821
32	2.173	3.615	4.784	5.809
64	2.168	3.590	4.764	5.792
128	2.174	3.587	4.745	5.775
256	2.171	3.591	4.753	5.773
<b>Black-Scholes</b>	2.169	3.587	4.750	5.773

**Tabela 3.** Cena opcji call w modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina dla danych:  
 $S_0=55$ ,  $K=57$ ,  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ .

Współczynniki wrażliwości szacowane są następująco:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \approx \frac{C_{0,1} - C_{1,1}}{S_{0,1} - S_{1,1}}$$

$$\gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \approx \frac{1}{2} \frac{\frac{C_{0,2} - C_{1,2}}{S_{0,2} - S_{1,2}} - \frac{C_{1,2} - C_{2,2}}{S_{1,2} - S_{2,2}}}{S_{0,2} - S_{2,2}}$$

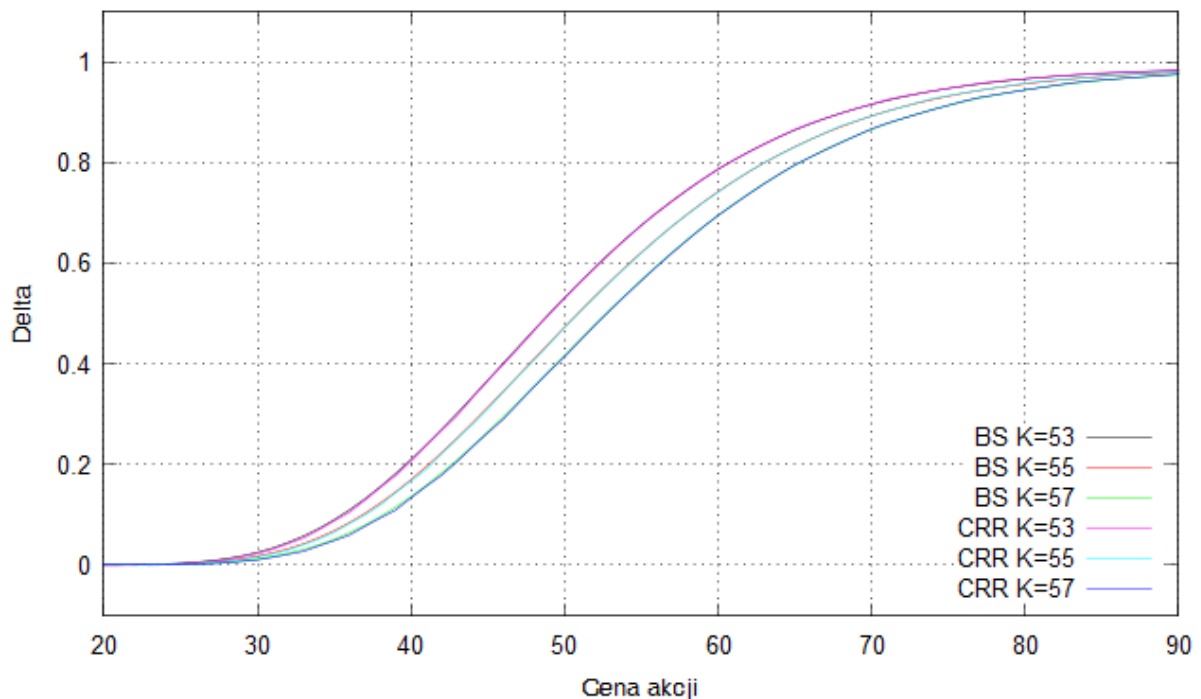
$$\theta = \frac{\partial C}{\partial T} \approx \frac{C(T-0.01T) - C(T+0.01T)}{2 \cdot 0.01}$$

$$\nu = \frac{\partial C}{\partial \sigma} \approx \frac{C(\sigma+0.01\sigma) - C(\sigma-0.01\sigma)}{2 \cdot 0.01}$$

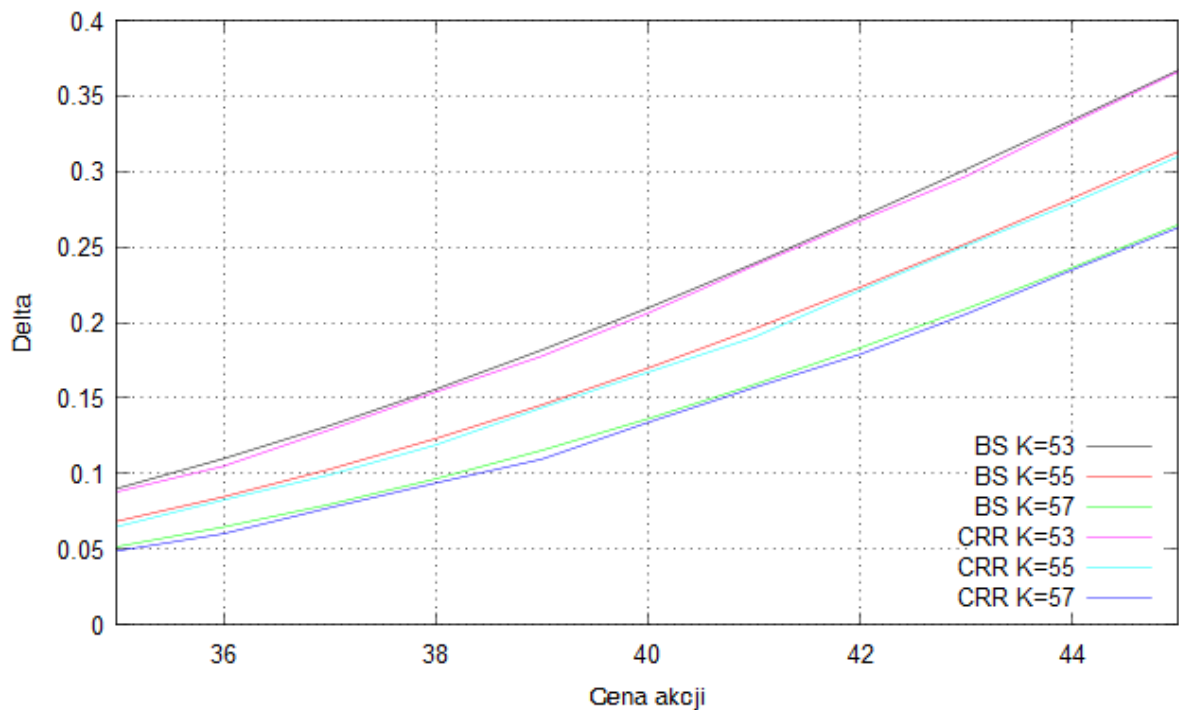
$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r} \approx \frac{C(r+0.01r) - C(r-0.01r)}{2 \cdot 0.01}$$

Poniższe wykresy przedstawiają wartości współczynników wrażliwości w zależności od ceny akcji. Porównane są modele Blacka-Scholesa i Coxa-Rossa-Rubinsteina dla opcji w cenie (K=53), at-the-money (K=55) i poza ceną (K=57).

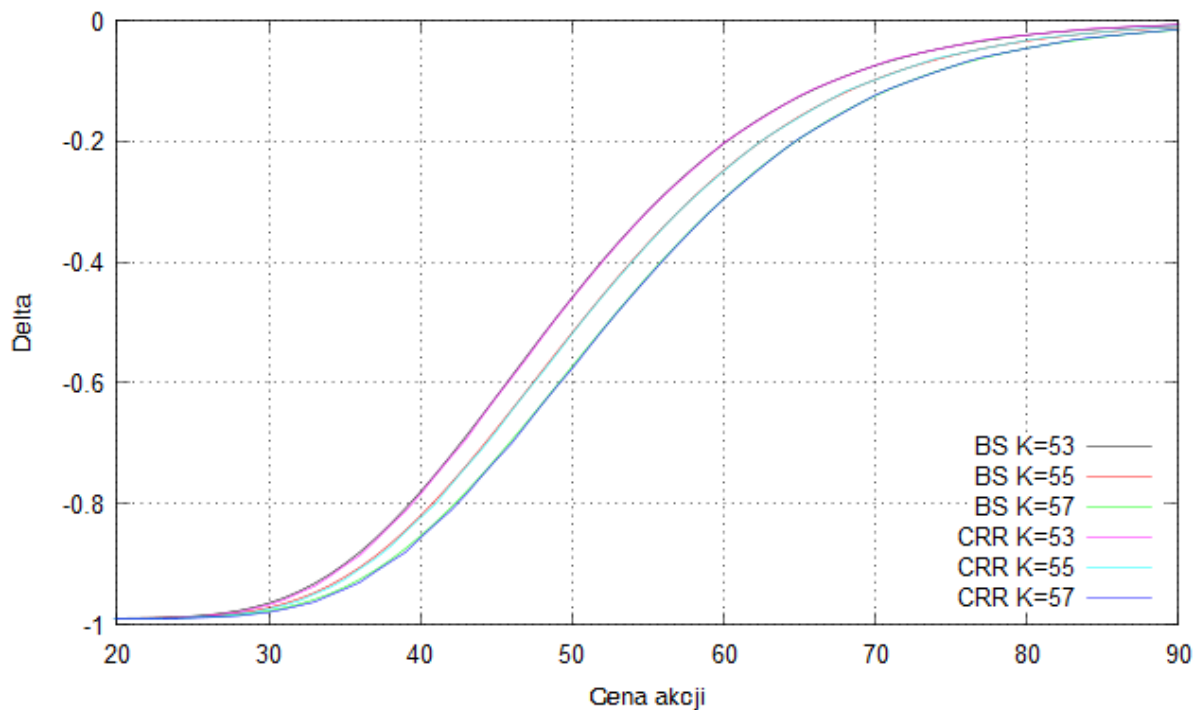
### Delta



**Rysunek 3.** Opcja call:  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $T=1$ ,  $N=35$ .

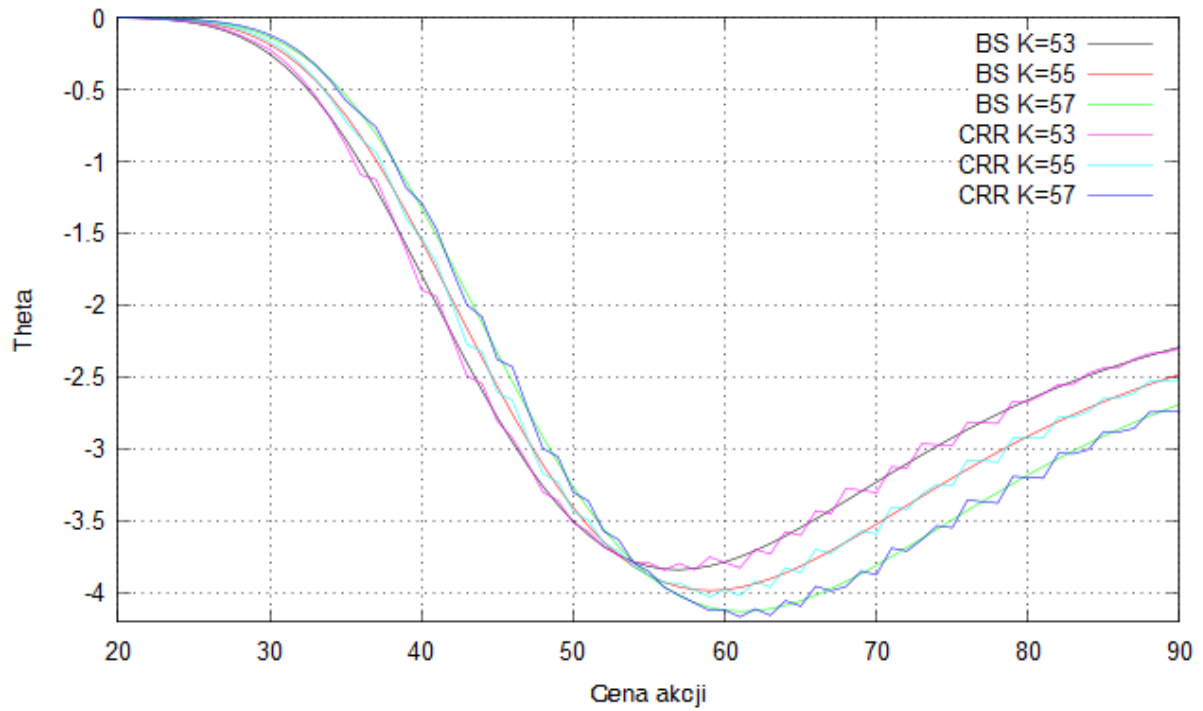


**Rysunek 4.** Fragment rysunku 2 w przybliżeniu.

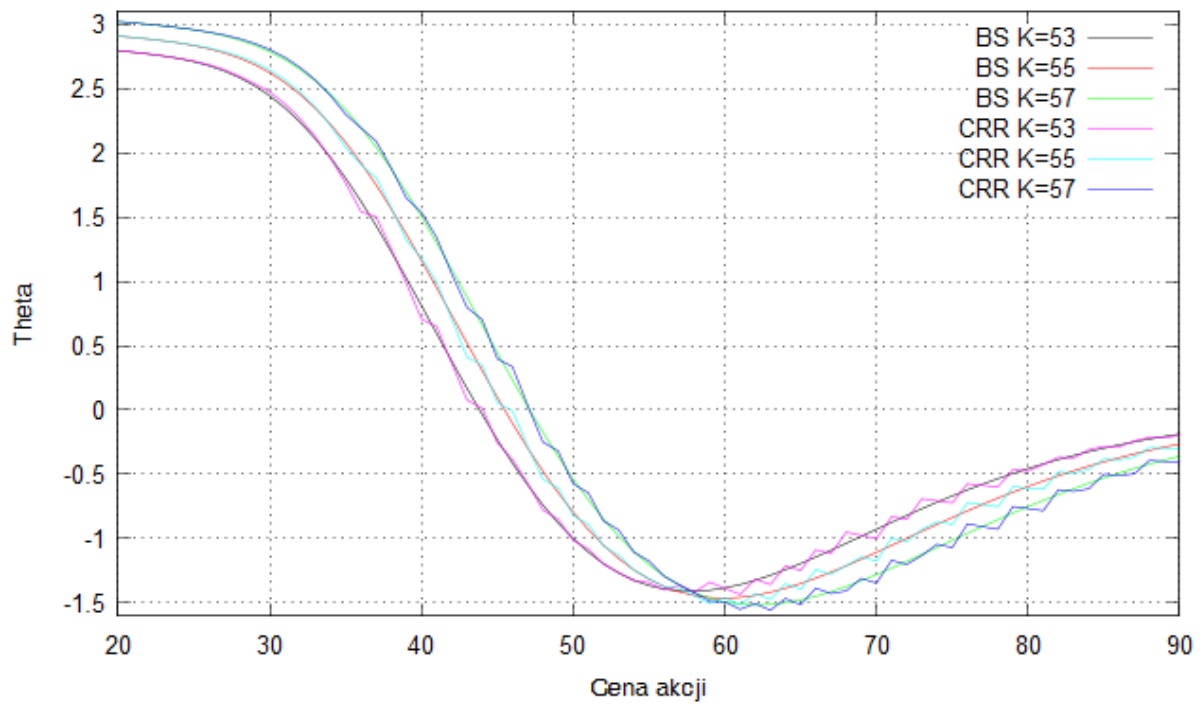


**Rysunek 5.** Europejska opcja put:  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $T=1$ ,  $N=35$ .

## Theta

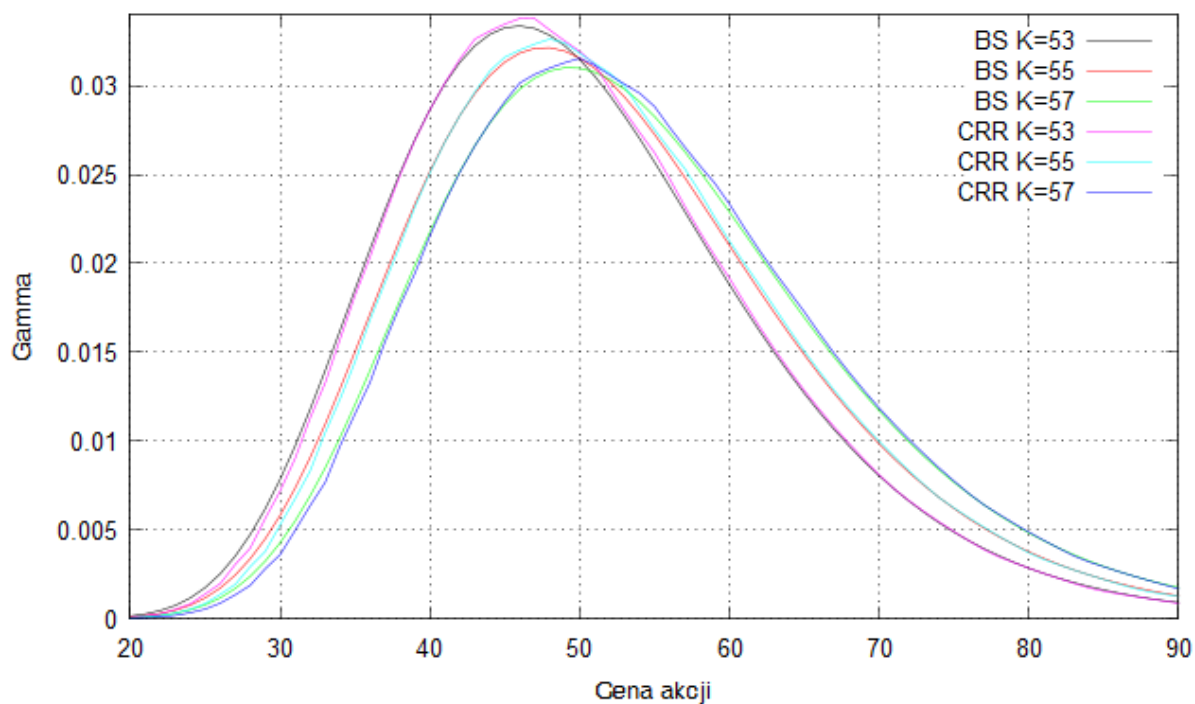


**Rysunek 6.** Opcja call:  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $T=1$ ,  $N=200$ .



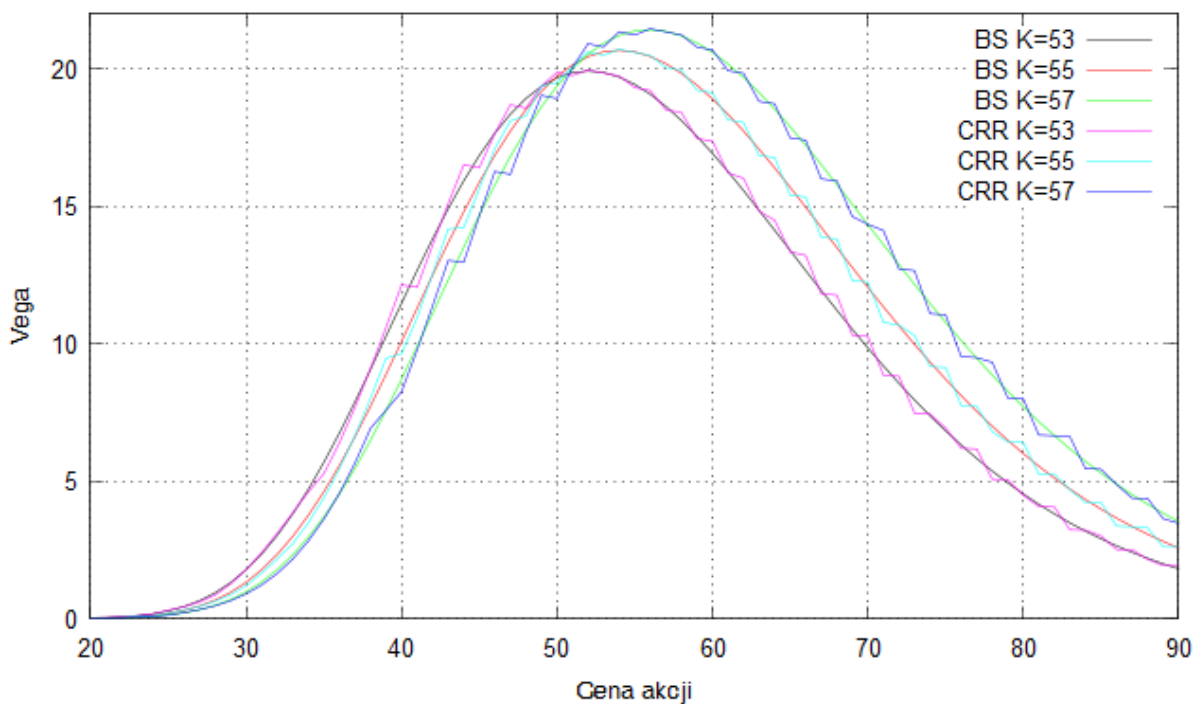
**Rysunek 7.** Europejska opcja put:  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $T=1$ ,  $N=200$ .

### Gamma



**Rysunek 8.** Opcja call i europejska opcja put:  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $T=1$ ,  $N=35$ .

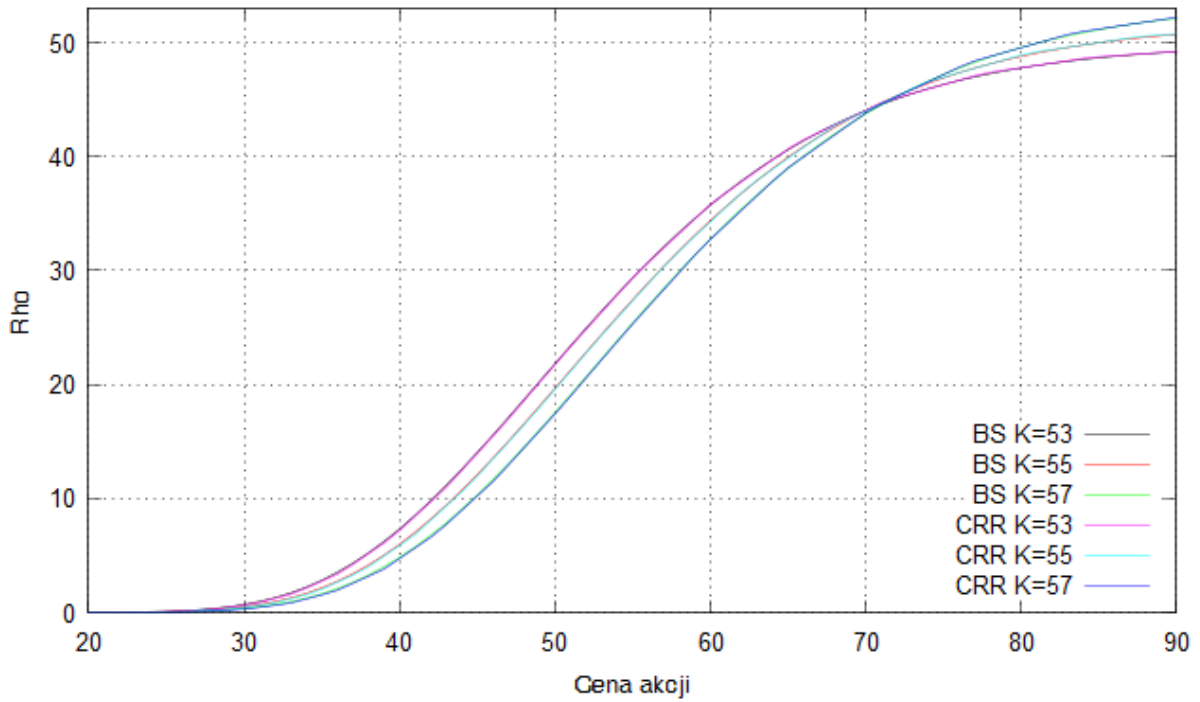
### Vega



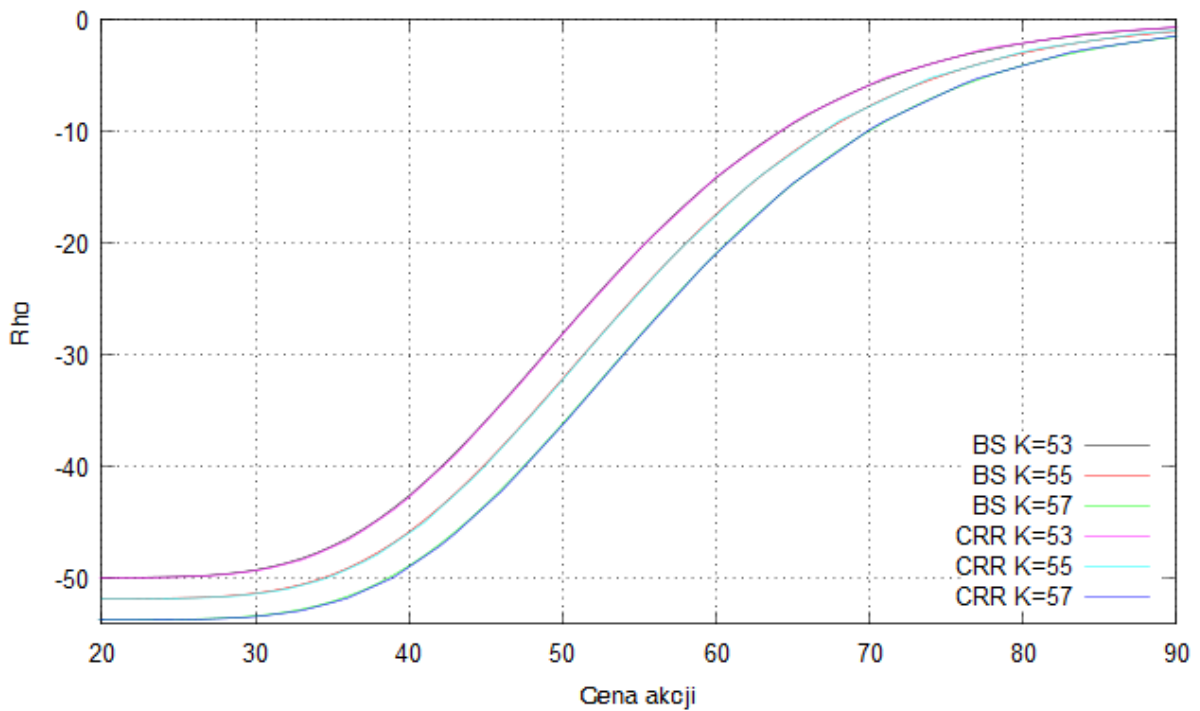
**Rysunek 9.** Opcja call i europejska opcja put:  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $T=1$ ,  $N=250$ .



## Rho



**Rysunek 10.** Opcja call:  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $T=1$ ,  $N=35$ .



**Rysunek 11.** Europejska opcja put:  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $T=1$ ,  $N=35$ .

Dla amerykańskiej opcji put wyniki są następujące:

Opcja put	Model CRR amerykańska	Model BS europejska
Cena	5.39	5.0
$\Delta$	-0.475	-0.423
$\theta$	-1.645	-1.206
$\gamma$	0.035	0.028
$\nu$	21.102	21.366
$\rho$	-19.282	-28.293

**Tabela 4.**  $S_0=55$ ,  $K=57$ ,  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $T=1$ ,  $N=35$ .

Liczba kroków	$T=0.25$	$0.5$	$0.75$	$1$
4	3.684	4.491	4.766	5.476
16	3.594	4.425	4.802	5.450
32	3.561	4.396	4.979	5.432
64	3.559	4.375	4.959	5.414
128	3.561	4.587	4.946	5.402
256	3.558	4.375	4.952	5.401

**Tabela 5.** Cena amerykańskiej opcji put w modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina dla danych:  
 $S_0=55$ ,  $K=57$ ,  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ .

## Model Jarrowa-Rudda

W modelu Jarrowa-Rudda przyjęte jest założenie, że  $p = \frac{1}{2}$ . Podstawiając tę wartość do równań (♦) i (♥) otrzymujemy w przybliżeniu:

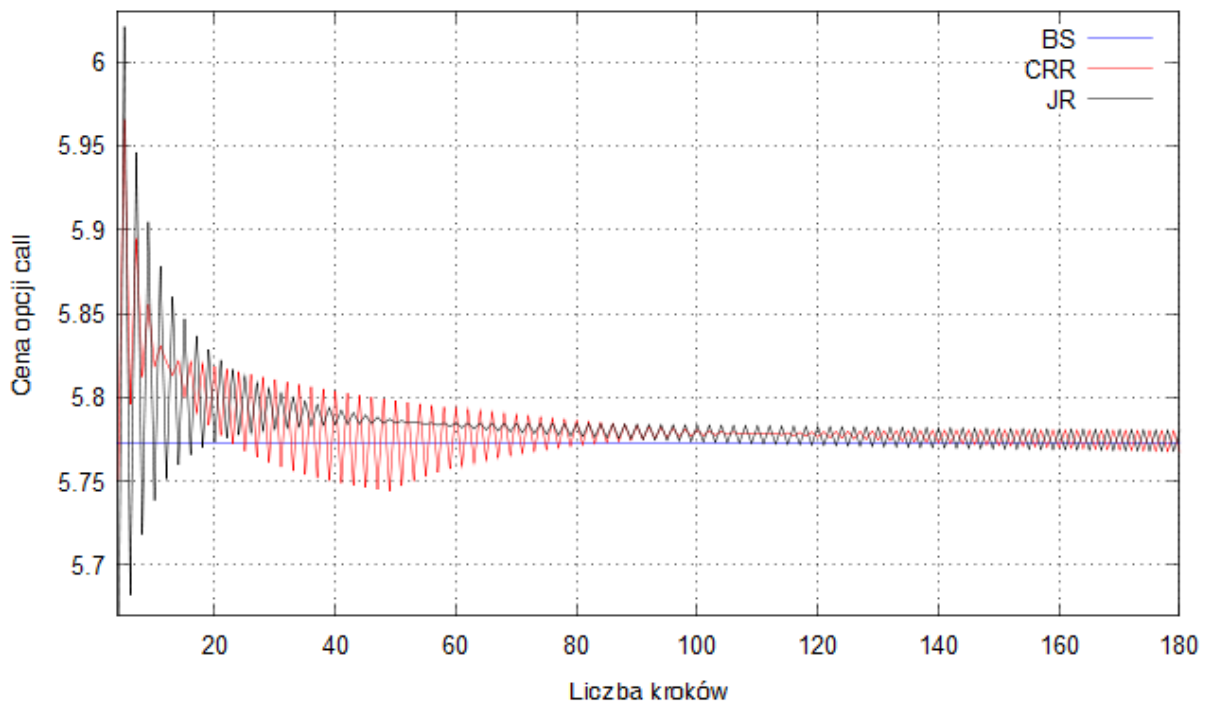
$$u = e^{\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Jako, że  $ud = e^{2\mu\Delta t}$  drzewo cen w modelu JR jest przekrzywione.

Opcja Call	Model JR	Model CRR	Model BS
Cena	5.78	5.78	5.77
$\Delta$	0.566	0.566	0.566
$\theta$	-3.872	-3.902	3.882
$\gamma$	0.028	0.028	0.028
$\nu$	21.524	21.534	21.366
$\rho$	26.704	25.353	25.388

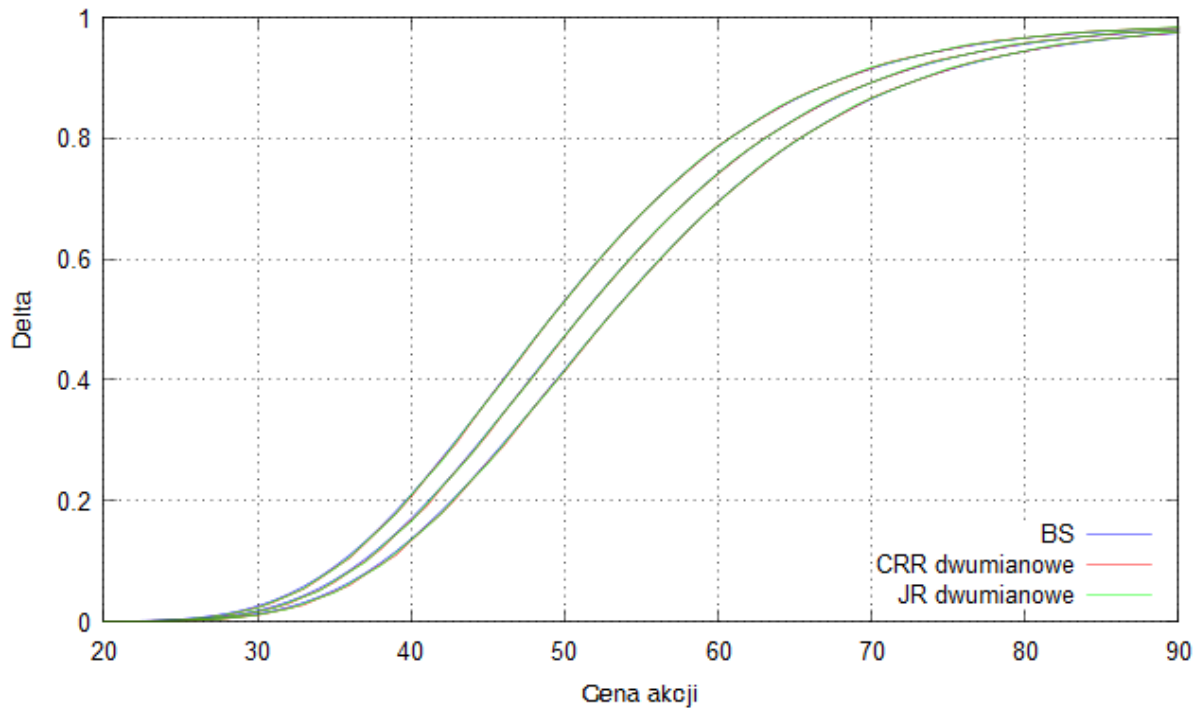
**Tabela 6.** Porównanie modeli Jarrowa-Rudda, Coxa-Rossa-Rubinsteina i Blacka-Scholesa dla opcji call,  $S_0=55$ ,  $K=57$ ,  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $T=1$ ,  $N=100$ .



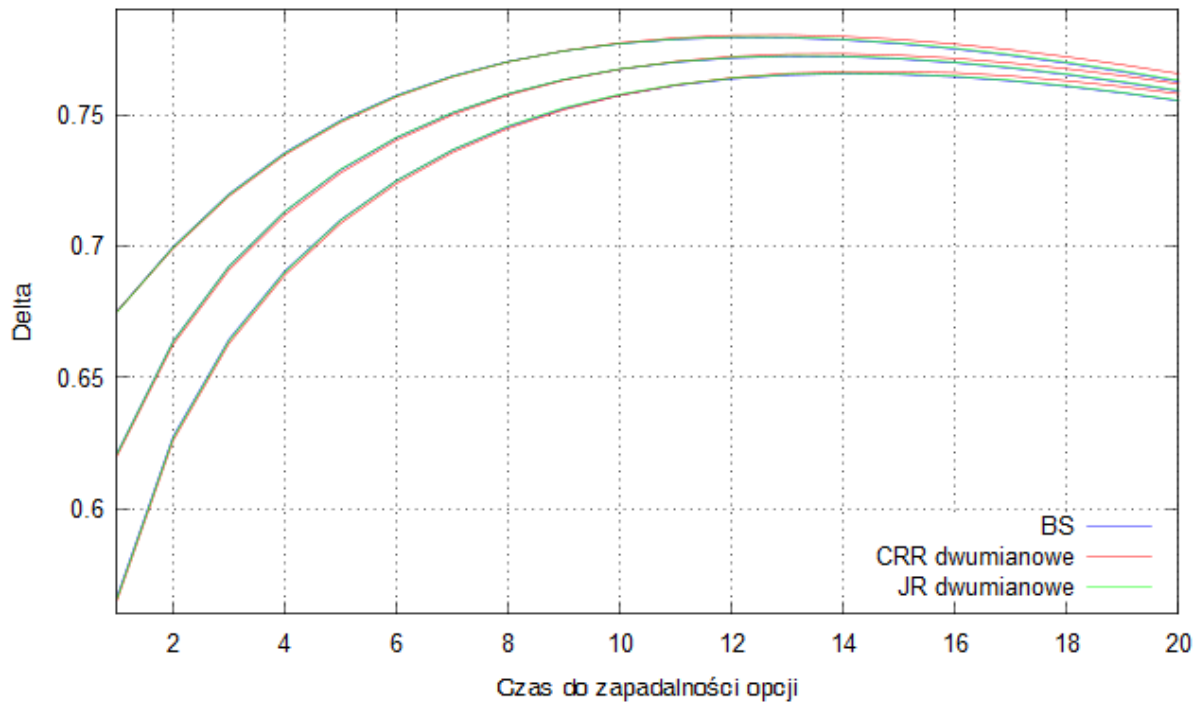
**Rysunek 12.** Porównanie cen opcji call w zależności od liczby kroków w modelach Jarrowa-Rudda, Coxa-Rossa-Rubinsteina i Blacka-Scholesa dla danych:

$S_0=55$ ,  $K=57$ ,  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $T=1$ .

## Delta



**Rysunek 13.** Opcja call dla  $K=53$  (linia położona najwyżej),  $K=55$  i  $K=57$ ,  
 $S_0=55$ ,  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $N=35$ .



**Rysunek 14.** Opcja call dla  $K=53$  (linia położona najwyżej),  $K=55$  i  $K=57$ ,  
 $S_0=55$ ,  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $N=35$ .

## Model trójmianowy

Model trójmianowy dopuszcza dodatkowe zdarzenie dzięki czemu lepiej odzwierciedla wahania cen akcji niż model dwumianowy. W modelu tym możliwe są trzy ruchy ceny dla każdego okresu – w górę, pośredni i w dół.

## Model trójmianowy Coxa–Rossa–Rubinsteina

Jeśli w węźle  $(i, j)$  drzewa trójmianowego CRR cena akcji wynosi  $S_{i,j}$  to w momencie  $j+1$  może wzrosnąć do  $S_{i,j}u = S_{i,j}e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$ , spaść do  $S_{i,j}d = S_{i,j}e^{-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$  lub utrzymać się na tym samym poziomie  $S_{i+1,j+1} = S_{i,j}m = S_{i,j}$ . Prawdopodobieństwa zmian określone są następująco:

$$\begin{aligned}p_u &= \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{2} \frac{\mu}{\lambda\sigma} \sqrt{\Delta t} \\p_d &= \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{2} \frac{\mu}{\lambda\sigma} \sqrt{\Delta t} \\p_m &= 1 - p_u - p_d = 1 - \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

przy czym  $\lambda$  jest dobrane tak, aby powyższe prawdopodobieństwa były nieujemne.

Gdy  $\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}}$  uzyskuje się najszybszą zbieżność ceny opcji do ceny wyliczonej analitycznie. Dla  $\lambda=1$  otrzymamy model dwumianowy.

Cenę opcji  $f_{0,0}$  wylicza się następująco:

$$S_{i,N} = S_{0,0}u^{N-i}d^i \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, 2N$$

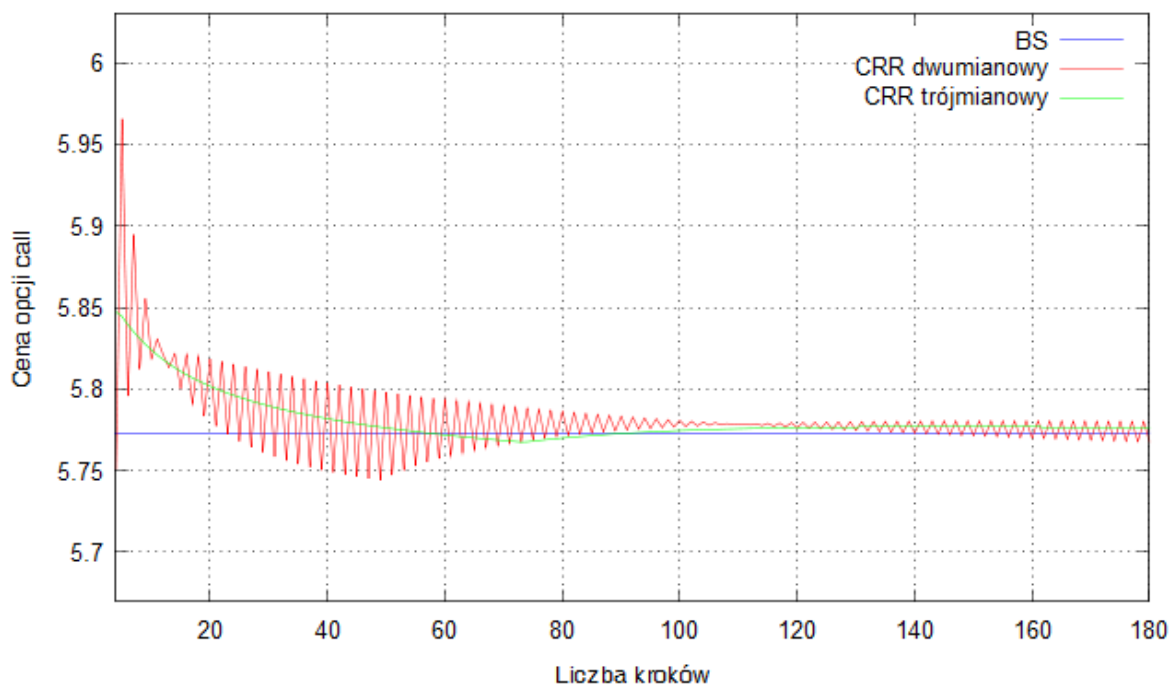
$$S_{i,j} = S_{0,0}u^{j-i}d^i \quad \text{dla } j = 0, 1, \dots, N-1, i = 0, 1, \dots, 2j \quad (\text{opcja amerykańska})$$

$$f_{i,N} = F(S_{i,N}) \quad i = 0, 1, \dots, 2N$$

$$f_{i,j} = e^{-r\Delta t}(p_u f_{i,j+1} + p_m f_{i+1,j+1} + p_d f_{i+2,j+1}) \quad (\text{opcja europejska})$$

$$f_{i,j} = \max(h(S_{i,j}), e^{-r\Delta t}(p_u f_{i,j+1} + p_m f_{i+1,j+1} + p_d f_{i+2,j+1})) \quad (\text{opcja amerykańska})$$

dla  $j = 0, 1, \dots, N-1, i = 0, 1, \dots, 2j-2$ .



Rysunek 15.  $S_0=55$ ,  $K=57$ ,  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $T=1$ ,  $\lambda=\sqrt{\frac{3}{2}}$ .

Opcja call	Model trójmianowy CRR	Model dwumianowy CRR	Model BS
Cena	5.77	5.78	5.77
$\Delta$	0.562	0.566	0.566
$\theta$	-3.870	-3.902	3.882
$\gamma$	0.028	0.028	0.028
$\nu$	21.256	21.534	21.366
$\rho$	25.351	25.353	25.388

Tabela 7.  $S_0=55$ ,  $K=57$ ,  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $T=1$ ,  $\lambda=\sqrt{\frac{3}{2}}$ ,  $N=100$ .

Liczba kroków	$\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}}$	$\lambda = \sqrt{3}$	$\lambda = 1$	BS
16	5.809	5.799	5.819	5.773
32	5.788	5.793	5.808	5.773
64	5.770	5.780	5.791	5.773
128	5.777	5.766	5.775	5.773
256	5.773	5.775	5.773	5.773
512	5.774	5.772	5.775	5.773

Tabela 8. Model CRR trójmianowy  
Opcja call:  $S_0=55$ ,  $K=57$ ,  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $T=1$ .

## Model trójmianowy Jarrowa-Rudda

W modelu trójmianowym JR możliwe są trzy zmiany ceny:

$$S_{i,j+1} = \begin{cases} S_{i,j}U = S_{i,j}e^{\mu\Delta t + \lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ S_{i,j}M = S_{i,j}e^{\mu\Delta t} \\ S_{i,j}D = S_{i,j}e^{\mu\Delta t - \lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{cases}$$

z prawdopodobieństwem  $p_u$ ,  $p_m$  i  $p_d$  odpowiednio. Prawdopodobieństwa wyliczamy analogicznie jak w modelu dwumianowym przyrównując pierwsze momenty ceny:

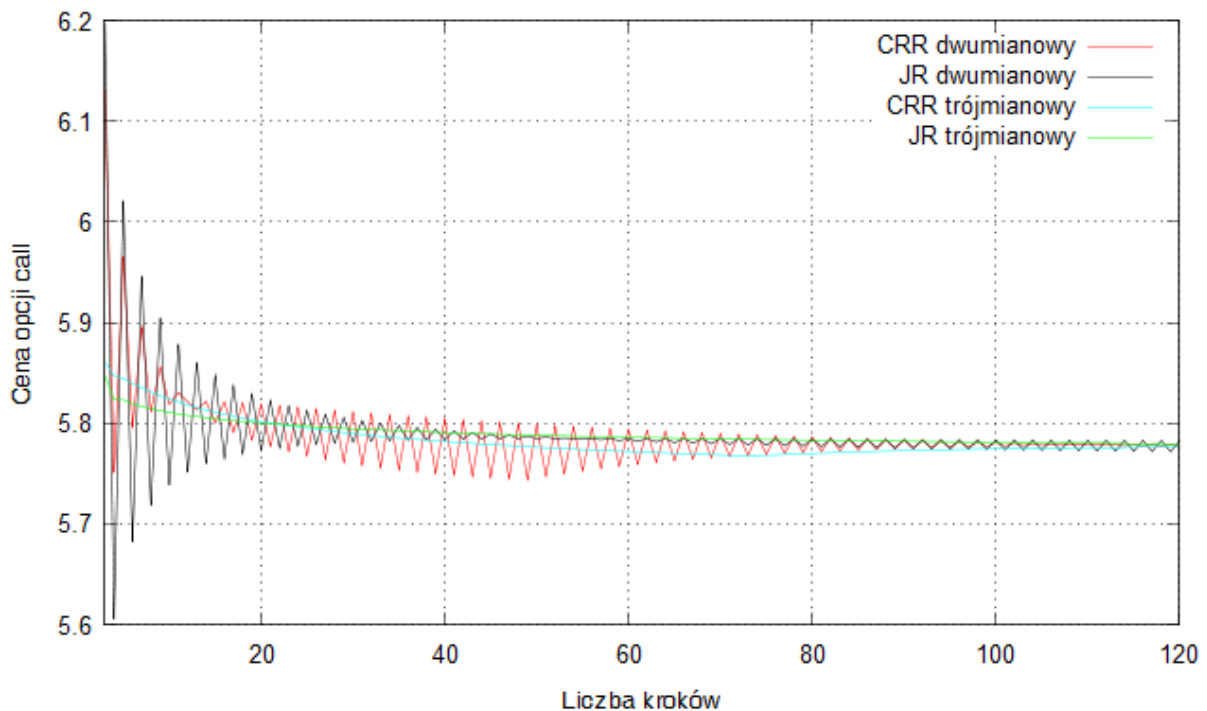
$$p_u S U + (1 - p_u - p_d) S M + p_d S D = S e^{r\Delta t}$$

$$p_u S^2 U^2 + (1 - p_u - p_d) S^2 M^2 + p_d S^2 D^2 = S^2 e^{2(r - q + \frac{\sigma^2}{2})\Delta t}$$

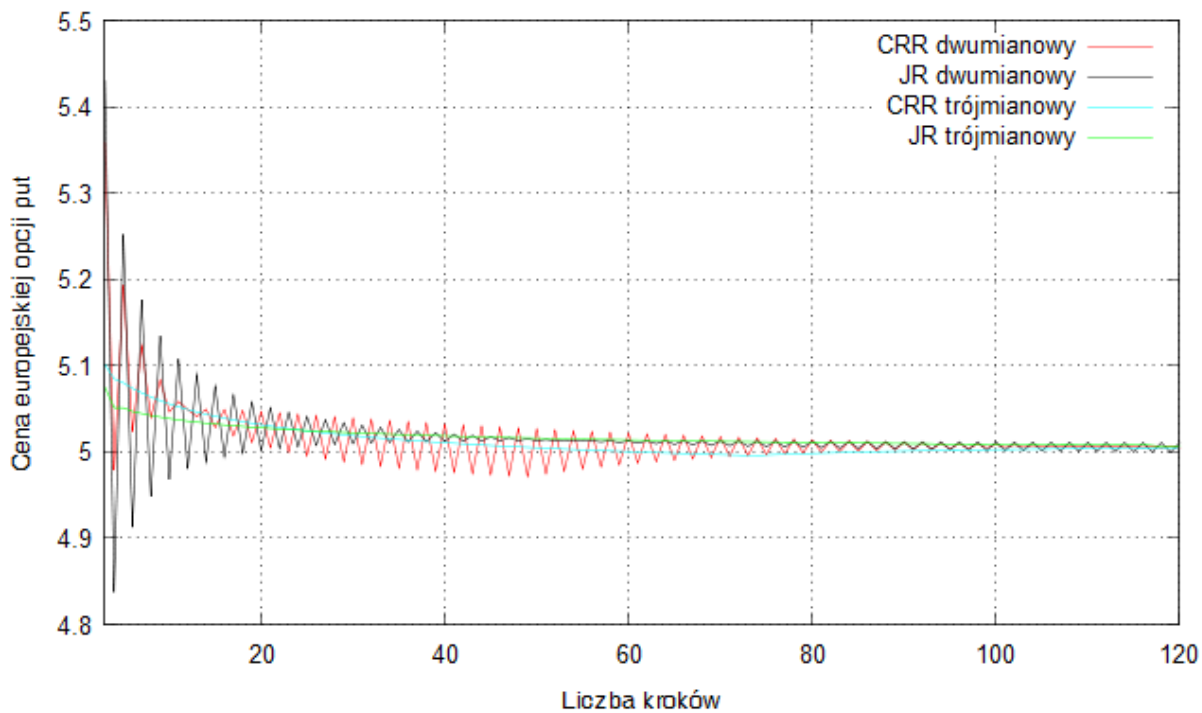
i otrzymując:

$$p_u = \frac{(e^{\frac{\sigma^2 \Delta t}{2}})^4 - (d+1)e^{\frac{\sigma^2 \Delta t}{2}} + d}{(d-u)(u-1)}, \quad p_d = \frac{(e^{\frac{\sigma^2 \Delta t}{2}})^4 - (u+1)e^{\frac{\sigma^2 \Delta t}{2}} + u}{(d-u)(1-d)}, \quad p_m = 1 - p_u - p_d$$

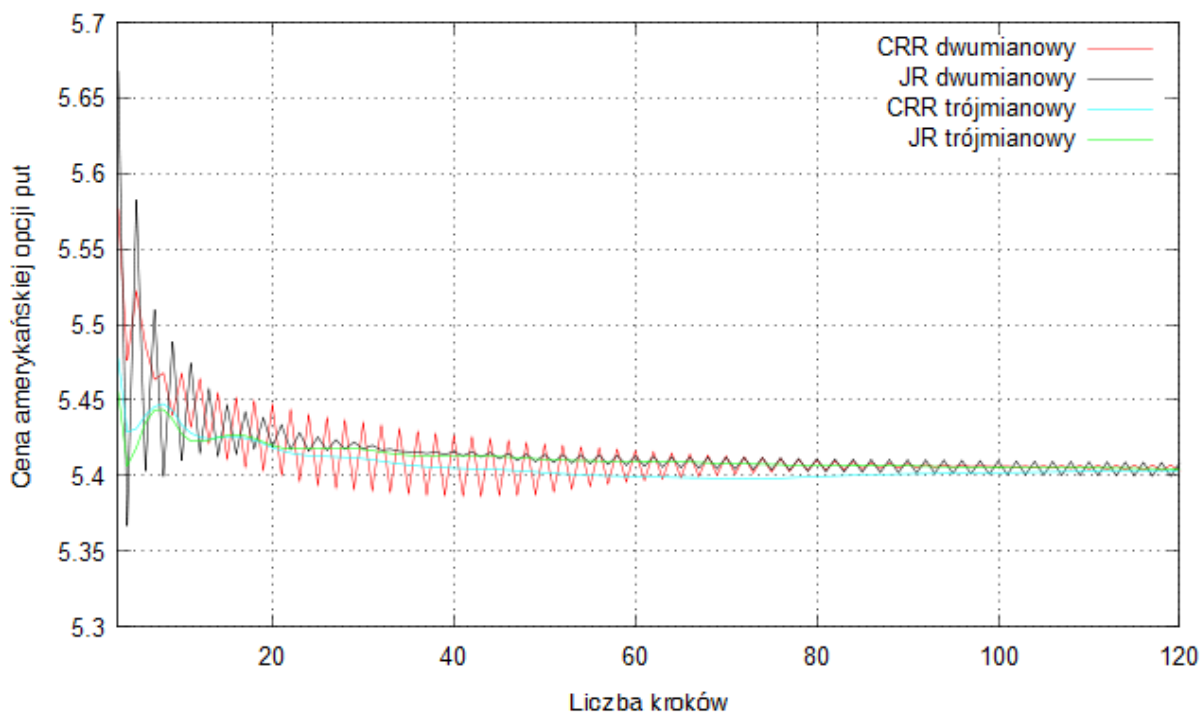
Wyniki dla  $S_0=55$ ,  $K=57$ ,  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $T=1$ ,  $\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}}$ :



Rysunek 16. Opcja call



**Rysunek 17.** Europejska opcja put.



**Rysunek 18.** Amerykańska opcja put.



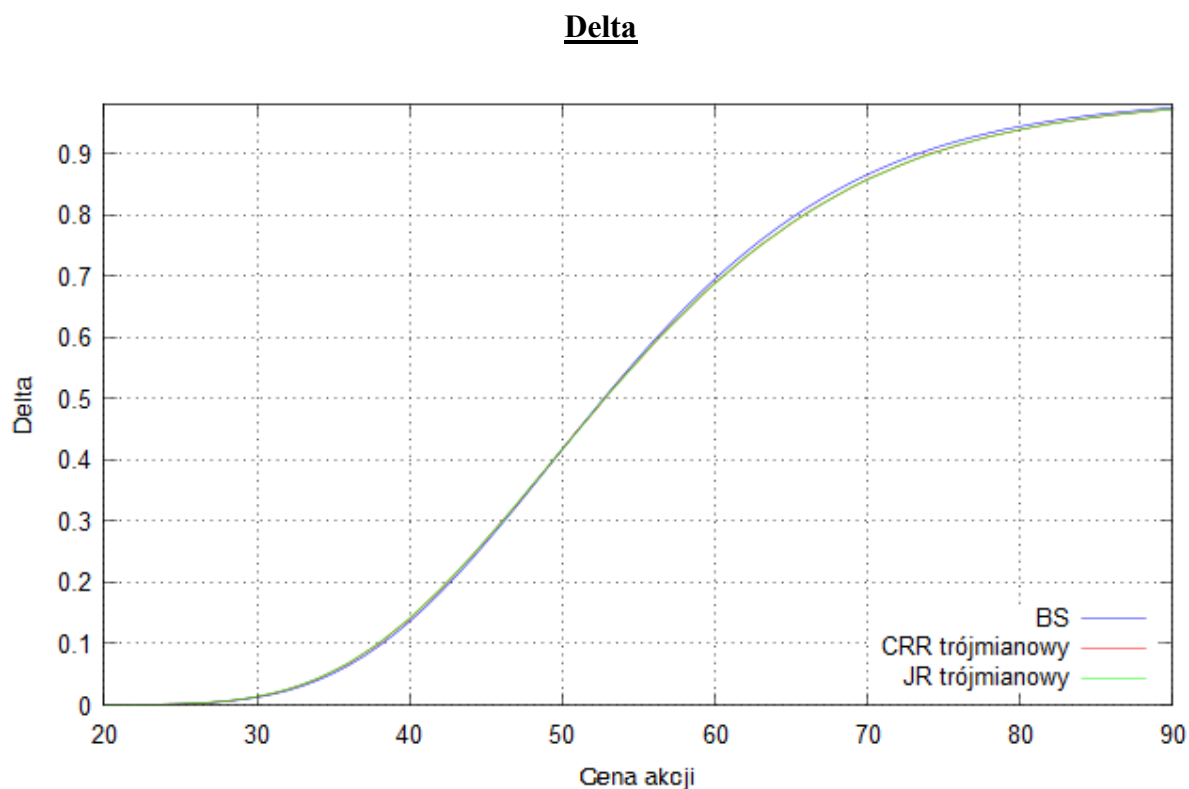
Deltę i gammę w modelu trójmianowym wyznaczmy z następujących wzorów:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \approx \frac{C(S+0.01S) - C(S-0.01S)}{2 \cdot 0.01}$$

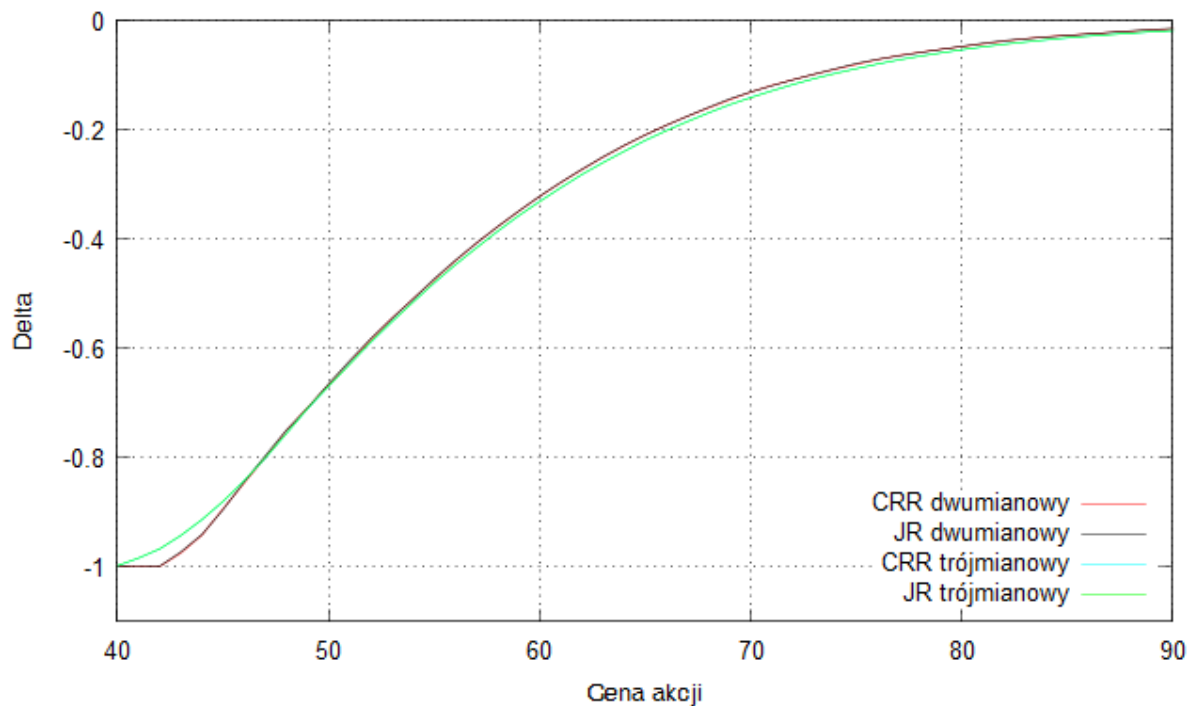
$$\gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \approx \frac{C(S+0.01S) - 2C(S) + C(S-0.01S)}{0.01^2}$$

Pozostałe współczynniki wyliczymy jak w modelu dwumianowym.

Wyniki dla  $K=57$ ,  $\sigma=0.25$ ,  $r=0.06$ ,  $q=0.01$ ,  $T=1$ ,  $N=35$ ,  $\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

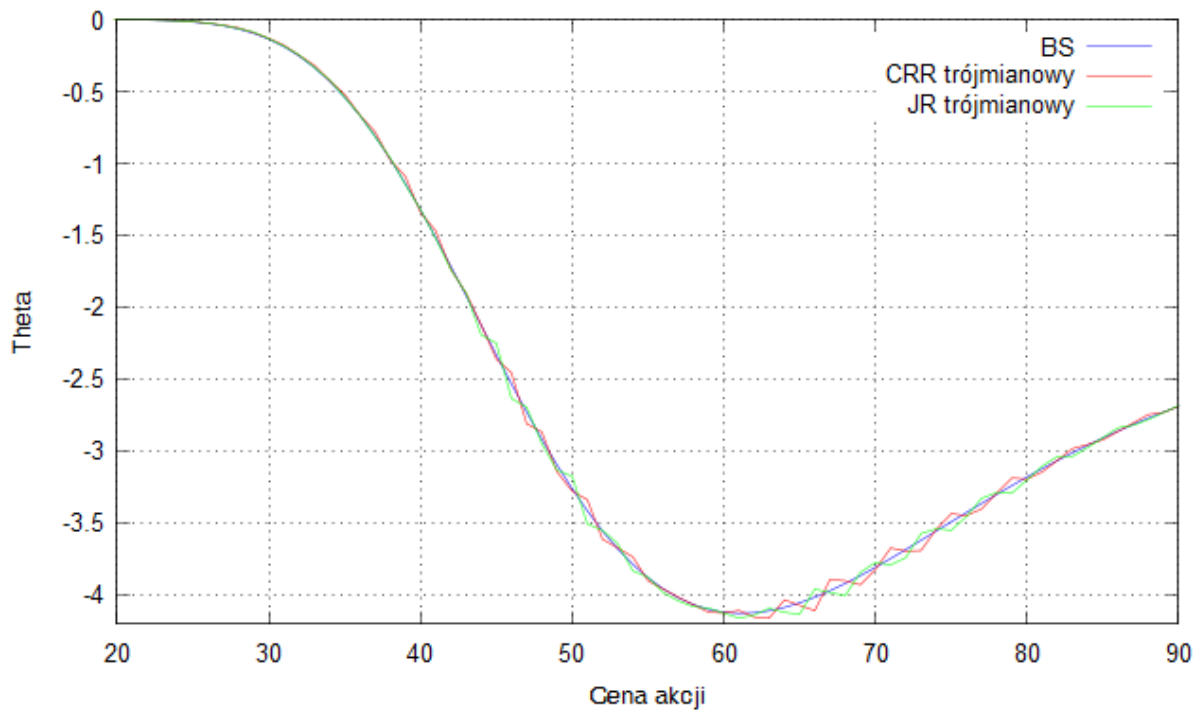


**Rysunek 19.** Opcja call.

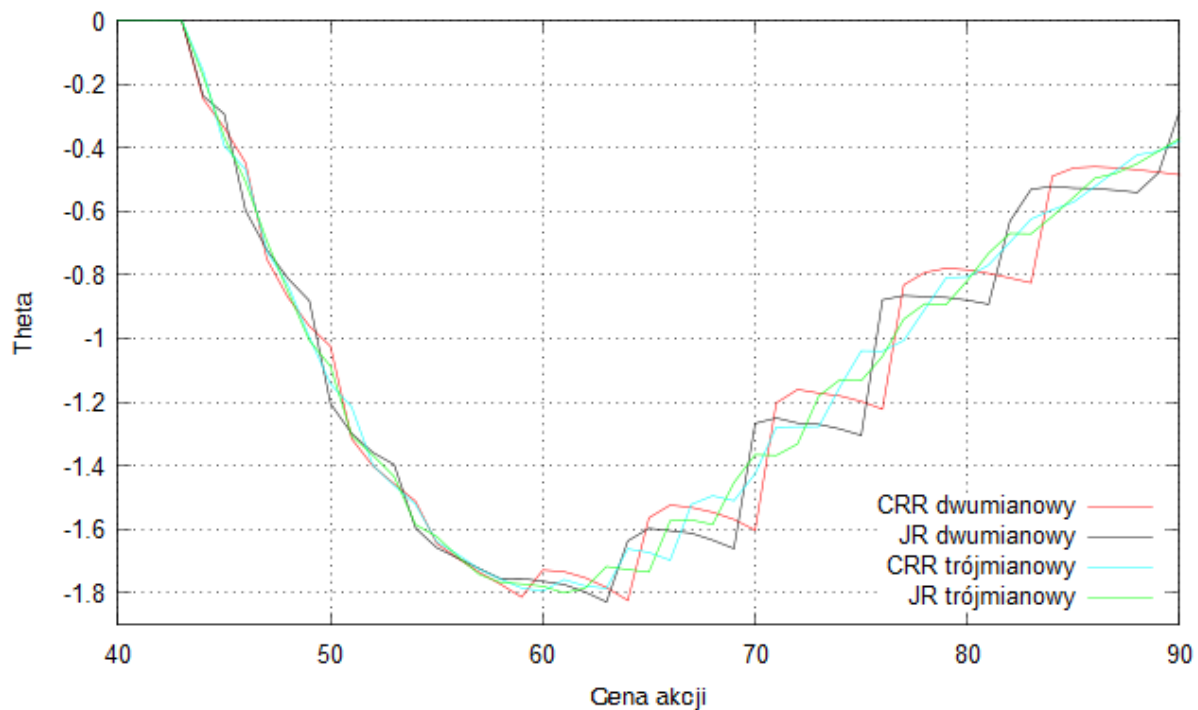


**Rysunek 20.** Amerykańska opcja put.

**Theta**

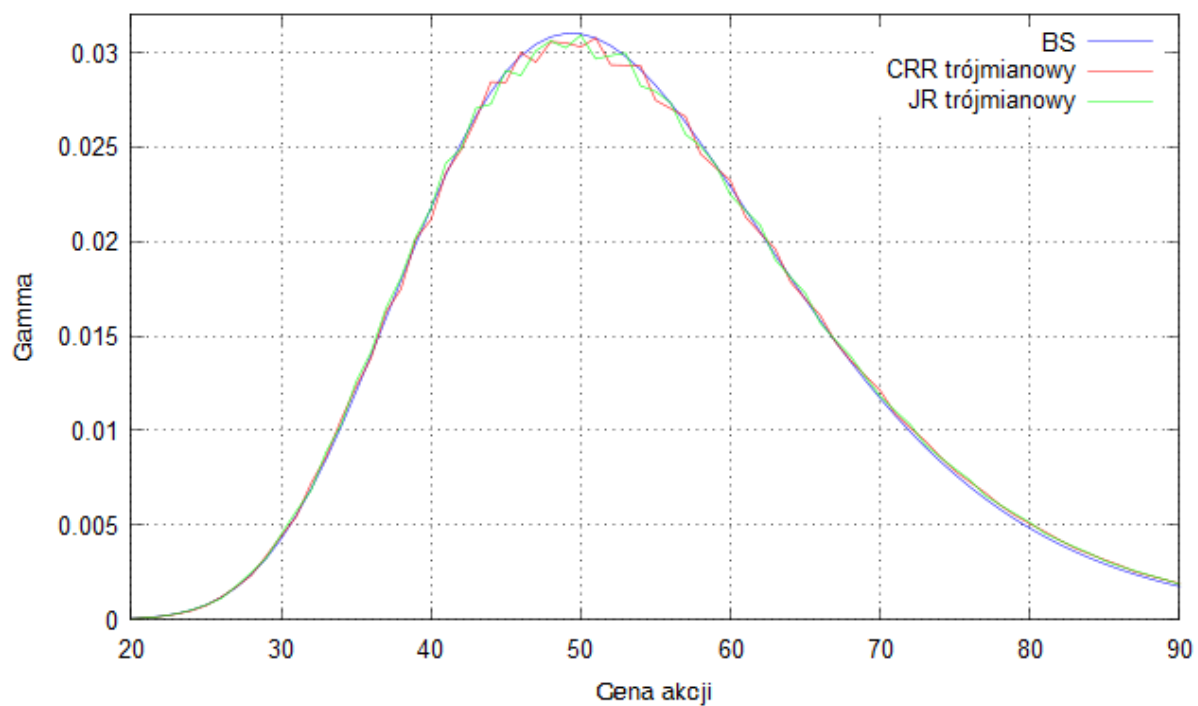


**Rysunek 21.** Opcja call.

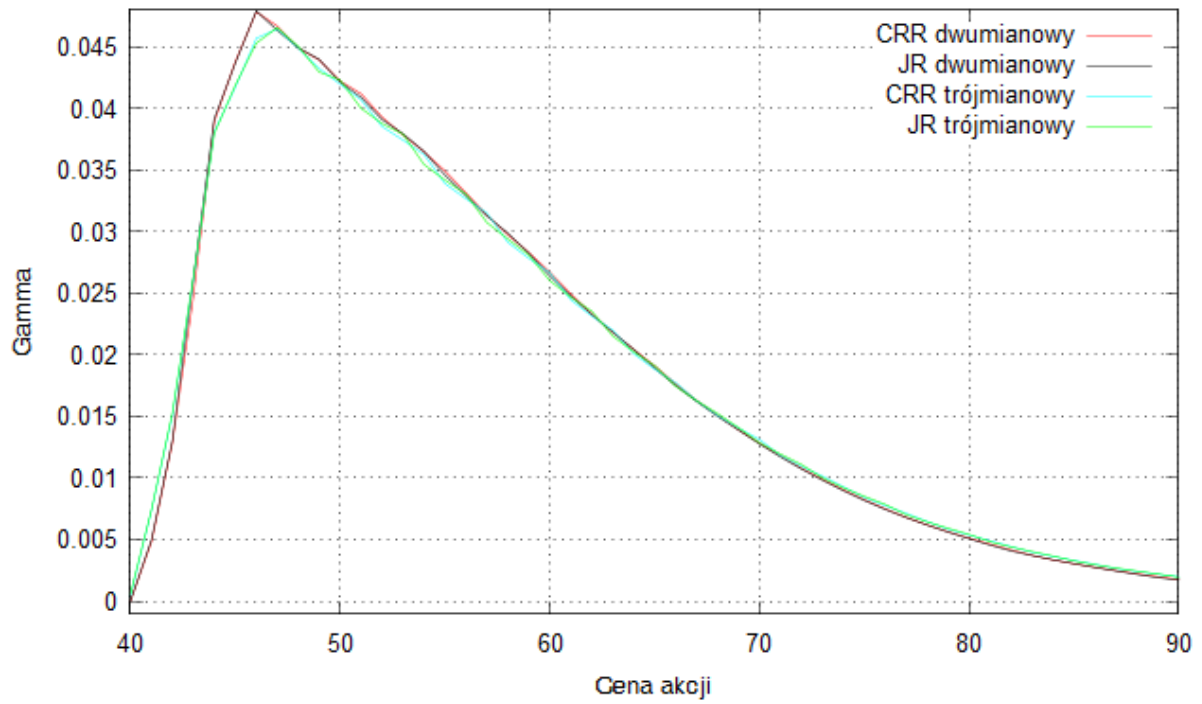


Rysunek 22. Amerykańska opcja put.

**Gamma**

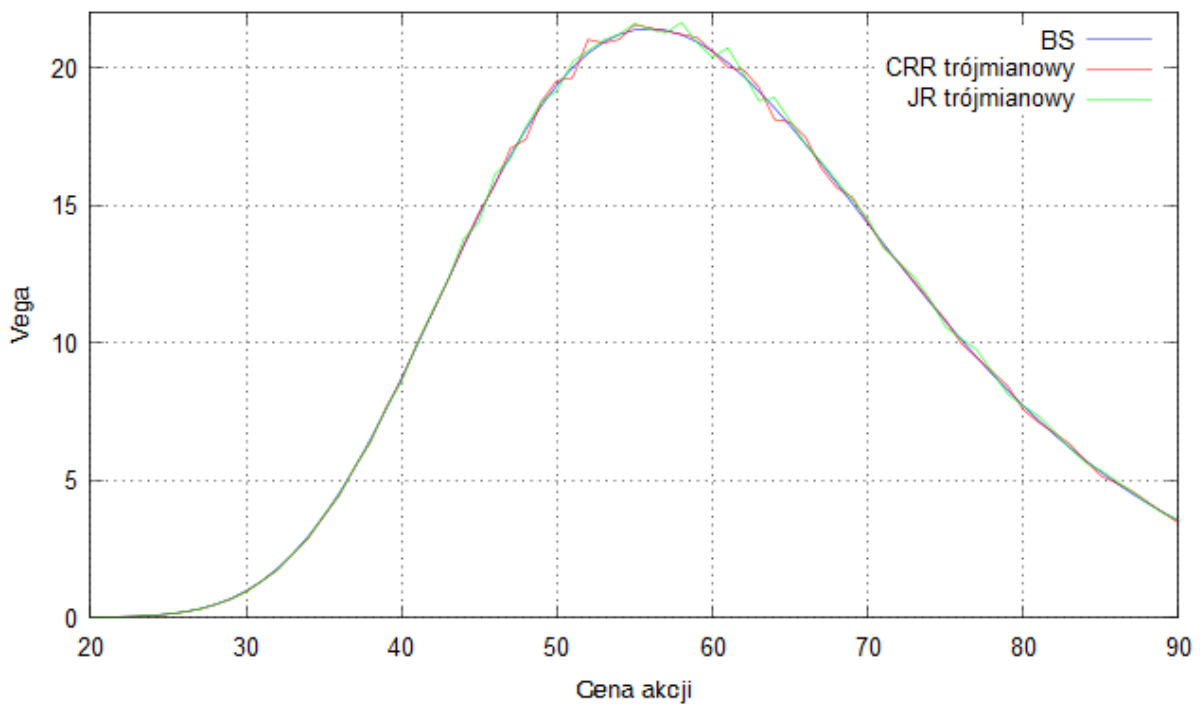


Rysunek 23. Opcja call i europejska opcja put.

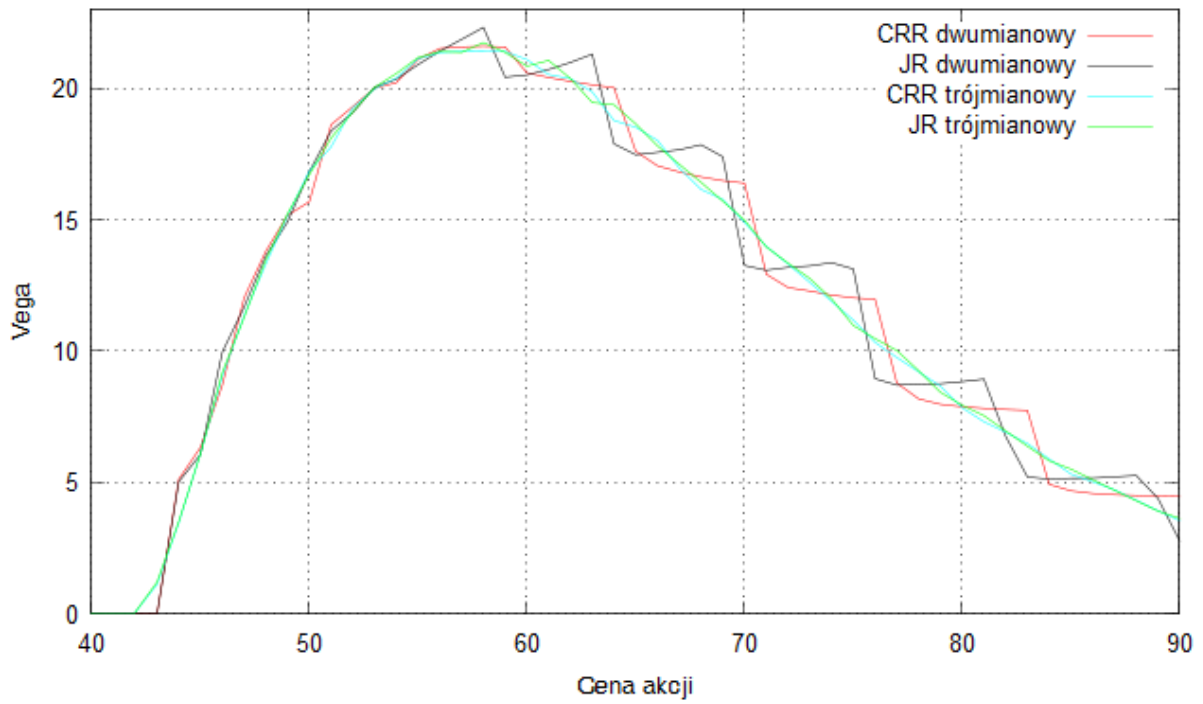


Rysunek 24. Amerykańska opcja put.

### Vega

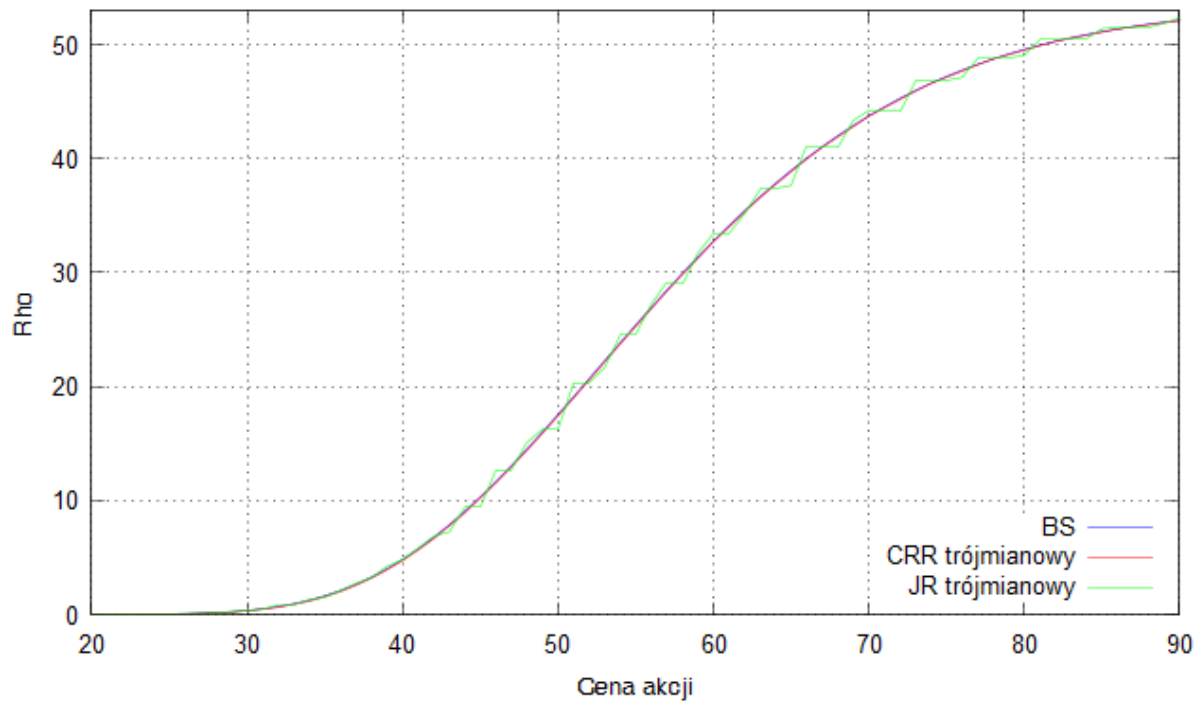


Rysunek 25. Opcja call i europejska opcja put.

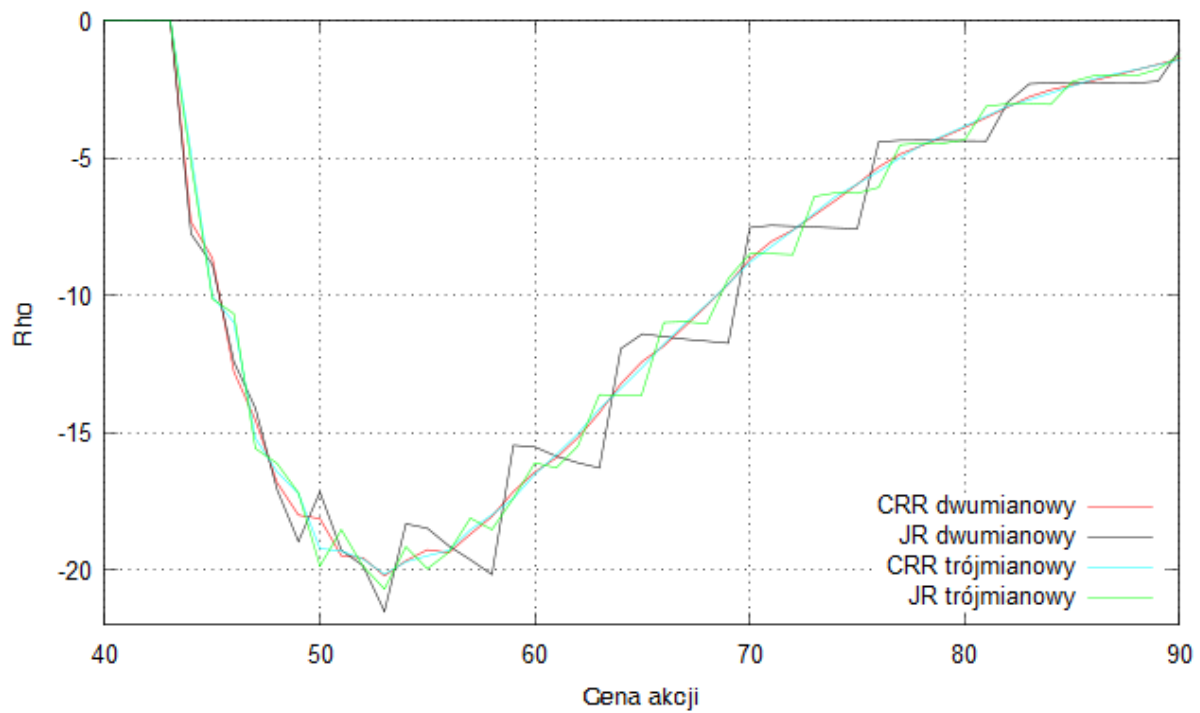


**Rysunek 26.** Amerykańska opcja put.

**Rho**



**Rysunek 27.** Opcja call.



**Rysunek 28.** Amerykańska opcja put.

## Bibliografia

*Modelling derivatives in C++*, Justin London, str. 123-178.