

Dokumentacja

Wycena papierów wartościowych o stałym oprocentowaniu

Piotr Szawlis

Wstęp

Wycena papierów wartościowych ze wzorów analitycznych jest najprostszym możliwym zadaniem obliczeniowym. W poniższym raporcie postaram się przedstawić najpierw wzory analityczne, a następnie omówić po krótku napisane przeze mnie funkcje. Jako, że program, którego jestem współautorem powstaje w ramach zajęć na Wydziale Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego wszelkie oznaczenia zgodne będą ze skryptyem Dr Włodzimierza Walusia [1]. Chciałbym również wytłumaczyć przyjętą przeze mnie konwencję podawania wszystkich danych w formie pełnych wektorów, tzn. np. dla obligacji dwuletniej o wypłatach co pół roku wymagany jest zarówno wektor złożony z czterech dat jak i wektor złożony z czterech wypłat (trzy kupony oraz nominal z ostatnim kuponem), mimo że jak wiemy, wystarczyłoby podać nominal i kupon. Taki uniwersalim nie jest w zasadzie istotny z punktu widzenia czasu obliczeń, a pozwala na wycenę dowolnie złożonych papierów wartościowych (np. obligacji o zmiennym nominalie i stopie procentowej) bez konieczności modyfikacji funkcji.

Wzory analityczne

Obligacje

Cena obligacji na chwilę t , wypłacającej w chwilach czasu T_i przepływy pieniężne o wartości $C(T_i)$ jest równa zdyskontowanej na chwilę t wartości tych przepływów. Jeśli $T_1 \leq t$ ($T_i > t$) $i = 2, \dots, M$, to

$$BondPrice = \sum_{i=2}^M DF(t, T_i) C(T_i) \quad (1)$$

Oczywiście najczęstszym przypadkiem jest obligacja o stałym nominalie i oprocentowaniu, dla której $C(T_i) = rN$ dla $i = 1, \dots, M - 1$ oraz $N(1 + r)$ dla T_M , gdzie N jest nominalem a r stopą obligacji. W praktyce rynkowej funkcjonują terminy "cena brudna" i "cena czysta" obligacji. Cena brudna jest bieżącą wartością wszystkich przyszłych przepływów finansowych jakie otrzyma właściciel obligacji (jest to "w zasadzie" cena ze wzoru (1), "w zasadzie" bo należy uwzględnić różnicę pomiędzy datą nabycia praw do odsetek z danego kuponu a datą wypłaty tego kuponu – patrz opis "Conventions"). Cena czysta jest pomniejszona o część kuponu $C(T_2)$, która przypada poprzedniemu właścicielowi obligacji czyli kupon $C(T_2)$ przemnożony przez $\frac{\Delta(t, T_1)}{\Delta(T_1, T_2)}$ czyli stosunek ułamku roku pomiędzy t a T_1 i długość drugiego okresu odsetkowego.

Forward Rate Agreement

Wycena analityczna swapów nie jest już taka prosta. Najwłaściwszą (z punktu widzenia tej pracy) metodą ich wyceny jest potraktowanie kontraktu IRS jako serii kontraktów FRA (Forward Rate Agreement), a także wycenianie osobno

nogi zmiennej i stałej. Taki sposób pozwoli nam uwolnić się od rozróżnienia czy mamy do czynienia ze zwykłym kontraktem (plain vanilla), czy z tzw. basis swapem (w którym obie strony płacą odsetki według różnej stopy), a także czy nominały nóg zmieniają się w czasie trwania kontraktu (variable notional principal swaps). Jest to zatem najbardziej uniwersalna metoda wyceny. Aby uzyskać wzory wyceńmy najpierw pojedynczy kontrakt FRA. Zgodnie z [1]:

- T_1 oznacza początek okresu depozytowego, który jest również datą rozliczenia (ang. settlement date),
- T_2 oznacza koniec okresu depozytowego,
- T_{fix} oznacza datę ustalenia stopy referencyjnej (ang. fixing date) - to jest, zwykle dwa dni robocze przed początkiem okresu depozytowego,
- $L = L(T_1, T_2)$ oznacza wartość stopy referencyjnej zaobserwowaną na rynku w dniu ustalenia stopy - najczęściej są to 1, 3 lub 6 miesięczne stopy lokat/depozytów na rynku międzybankowym - stopy WIBOR lub LIBOR,
- $\Delta = T_2 - T_1$ oznacza długość okresu depozytowego kontraktu FRA obliczoną według właściwej dla danej waluty konwencji (ACT/360 dla USD, EUR; ACT/365 dla PLN, GBP),
- R_{FRA} oznacza stopę kontraktu FRA, to jest zakontraktowaną wysokość stopy procentowej, tzw. cena kontraktu FRA,
- N oznacza nominal kontraktu
- $F(t, T_1, T_2)$ stopa forward dla okresu od T_1 do T_2 implikowana przez strukturę stóp procentowych z chwili wyceny t

Wartość nogi zmiennej zapadłego kontraktu FRA - wartość w dacie lub po dacie ustalenia stopy referencyjnej ($T_{fix} \leq t \leq T_1$)

$$NPV_{float} = DF(t, T_1) \cdot \frac{L \cdot \Delta \cdot N}{1 + L \cdot \Delta} \quad (2)$$

Wartość nogi stałej zapadłego kontraktu FRA - wartość w dacie lub po dacie ustalenia stopy referencyjnej ($T_{fix} \leq t \leq T_1$)

$$NPV_{fixed} = DF(t, T_1) \cdot \frac{R_{fra} \cdot \Delta \cdot N}{1 + L \cdot \Delta} \quad (3)$$

Wartość zapadłego kontraktu FRA

$$P_{fra} = NPV_{float} - NPV_{fixed} \quad (4)$$

Zarówno w całym dokumencie, jak i we wszystkich funkcjach, kontrakty są wyceniane według ceny dla nabywcy. Jeśli osoba kupująca płaci nogę stałą taki kontrakt nazywa się *Payer IRS* (takie kontrakty są wyceniane w zaimplementowanych funkcjach). Jeśli osoba kupująca płaci nogę zmienną taki kontrakt nazywa się *Receiver IRS*. Oczywiście cena *Receiver IRS* = - cena *Payer IRS*.

Wartość nogi zmiennej kontraktu FRA na podstawie stopy forward

Wycena kontraktu na podstawie stopy forward, czyli dla chwili t ($t < T_{fix}$), jest łatwiejsza i bardziej intuicyjna. Wartością oczekiwaną stopy procentowej na okres (T_1, T_2) , mającej się ustalić w momencie T_{fix} i wypłaconej w chwili T_2 jest implikowana przez ustaloną w chwili t stopę forward na okres: $F(t, T_1, T_2)$. Żeby policzyć jej aktualną wartość musimy zdyskontować ją odpowiednim czynnikiem dyskontowym, czemu odpowiada poniższy wzór. Jeszcze łatwiej, wycenia się nogę stałą, jako zdyskontowaną wartość stałego przepływu pieniężnego.

$$NPV_{float} = DF(t, T_2) \cdot F(t, T_1, T_2) \cdot \Delta \cdot N \quad (5)$$

Wartość nogi stałej kontraktu FRA ($T_{fix} \leq t \leq T_1$)

$$NPV_{fixed} = DF(t, T_2) \cdot R_{fra} \cdot \Delta \cdot N \quad (6)$$

Interest Rate Swap

Zgodnie z przyjętą konwencją kontrakt IRS możemy wycenić rozbijając go na z jednej strony na serię części stałych kontraktów FRA, z drugiej zaś na serię części zmiennych kontraktów FRA (być może o różnych datach zapadalności i nominalach).

Wartość nogi zmiennej zapadłego kontraktu IRS ($T^{fix} \leq t \leq T_1^z$)

Część zmienna składa się z N^z kontraktów FRA, z których każdy można scharakteryzować za pomocą trzech wartości o oznaczeniach analogicznych do poprzednich $\Delta_i^z, F(t, T_i^z, T_{i+1}^z), N_i^z$

$$NPV_{float} = DF(t, T_1^z) \cdot \frac{L(T_1^z, T_2^z) \cdot \Delta_1^z \cdot N_1^z}{1 + L(T_1^z, T_2^z) \cdot \Delta_1^z} + \sum_{i=2}^{N^z} DF(t, T_{i+1}^z) \cdot F(t, T_i^z, T_{i+1}^z) \cdot \Delta_i^z \cdot N_i^z$$

Wartość nogi stałej zapadłego kontraktu IRS ($T^{fix} \leq t \leq T_1^z$)

Część zmienna składa się z N^s kontraktów FRA, z których każdy można scharakteryzować za pomocą trzech parametrów analogicznych do poprzednich

Δ_i^s, R_i, N_i^s

$$NPV_{fixed} = DF(t, T_1^s) \cdot \frac{R(i) \cdot \Delta_1^s \cdot N_1^s}{1 + L(T_1^s, T_2^s) \cdot \Delta_1^s} \sum_{i=2}^{N^s} DF(t, T_{i+1}^s) \cdot R_i \cdot \Delta_i^s \cdot N_i^s \quad (7)$$

Wartość zapadłego kontraktu IRS

$$P_{IRS} = NPV_{float} - NPV_{fixed} \quad (8)$$

Wartość nogi stałej oraz zmiennej kontraktu IRS na podstawie stopy forward jest analogiczna, z tym, że sumowanie przebiega od $i = 1$ i nie ma pierwszego członu wyrażenia.

Wartość nogi zmiennej zapadłego kontraktu IRS in-arrears.

Kontrakty IRS in-arrears, są to kontrakty, w których noga zmienna ustalana jest na koniec okresu, a nie na jego początku. Można powiedzieć, że jest ona niejako przesunięta o jeden okres względem nogi stałej, o ile tylko okresy depozytowe się pokrywają. Dla kontraktów in-arrears, z przyczyn, które nie są przedmiotem niniejszej pracy, zamiast stopy F_i powinno używać się stopy FIA_i danej wzorem (inna wersja tego wzoru patrz [2])

$$FIA_i = F_i + \frac{F_i^2 \tau_i}{1 + F_i \tau_i} (\exp(\sigma_i^2 t_i) - 1), \quad (9)$$

gdzie σ_i^2 to volatylity capleta na odpowiedni okres, a t_i jest czasem do zapadalności capleta. Dyskontowanie zaś następuje na okres t

$$NPV_{float} = DF(t, T_1^z) \cdot \frac{L(T_1^z, T_2^z) \cdot \Delta_1^z \cdot N_1^z}{1 + L(T_1^z, T_2^z) \cdot \Delta_1^z} + \sum_{i=2}^{N^z} DF(t, T_i^z) \cdot FIA(t, T_i^z, T_{i+1}^z) \cdot \Delta_i^z \cdot N_i^z$$

Funkcje

O ile nie jest napisane inaczej, w tej sekcji wszystkie daty zapisane są w konwencji "dd - mmm - yyyy", czasy do zapadalności wyrażone są w postaci łańcuchów "xM", lub "xY", gdzie x są liczbami dziesiętnymi, czyli np. "18M" lub równoważnie "1.5Y" (dopuszczalne są jedynie takie liczby, które odpowiadają całkowitej liczbie miesięcy). Długości okresów odsetkowych odpowiadających różnym instrumentom są podawane w postaci liczb całkowitych (lub wektorów liczb całkowitych), które wyrażają długość odpowiedniego okresu odsetkowego w miesiącach. Stopy procentowe są ułamekami dziesiętnymi, czyli np. 0.05. Wszystkie przepływy pieniężne i nominały podane są w jednostkach waluty: 100, 1 000

itd. a nie np. 1 mln. *conv* (*convfixed*, *convfloat*) jest zmienną typu *cell array* postaci {*Day-Count-Convention*, *Business-Day-Adjustment*, *Financial-Center*, *Settlement-Date-Offset*, *End-of-Month-Adjustment*, *Currency*} (patrz opis "Conventions").

BondPrice(contractdate, dateofissu, period, maturity, coupon, nominal, conv, firstpaymentoffset)

Argumenty:

contractdate – data kontraktu (zakupu) obligacji,

dateofissu – data wyemitowania obligacji,

period – długość okresu odsetkowego,

maturity – czas trwania liczony od daty *dateofissu*,

coupon – oprocentowanie obligacji,

nominal – nominal, który jest wypłacany w momencie zapadalności obligacji,

conv – konwencja liczenia czasu.

firstpaymentoffset – *cell array* postaci {*Coupon-Offset*, *Contract-Payment-Offset*} (patrz opis "Conventions").

Zwracane wartości: czysta oraz brudna cena obligacji.

Komentarz

Maturity podawana jest w konwencji xM, xY, gdzie x jest liczbą dziesiętną, z ograniczeniem, że podany okres czasu musi odpowiadać całkowitej liczbie miesięcy. *Period* podawany jest jako liczba całkowita lub wektor liczb całkowitych (szczegółowe wyjaśnienia patrz niżej).

Zmienną, która definiuje obligację jest *period*. Jeśli *period* jest pojedynczą liczbą całkowitą jest ona interpretowana jako stała długość okresu odsetkowego. Wtedy obligacja płaci kupony w datach *coupondates* równo rozłożonych od *dateofissu* przez okres równy *maturity*. Jeśli *period* jest wektorem liczb całkowitych to wektor ten wyznacza długości poszczególnych okresów odsetkowych (a tym samym *coupondates*). W takiej sytuacji informacja zawarta w zmiennej *maturity* jest ignorowana (zakłada się, że użytkownik prawidłowo podzielił czas *maturity* pomiędzy poszczególne okresy odsetkowe).

Zmienna *coupon* ustala wielkość poszczególnych płatności odsetkowych. Jeśli jest to wektor o długości równej liczbie *coupondates*, to w każdej *coupondates* płacony jest kupon w wysokości ustalonej przez odpowiednią składową wektora *coupon*. W przeciwnym przypadku wszystkie płacone kupony są równe *coupon(1)*.

Cena obligacji obliczana jest na podstawie rzeczywistych dat przepływów finansowych (*settlementdates*) oraz rzeczywistej daty zapłaty za kupowaną obligację (*contractdate* + *Contract-Payment-Offset*).

Jeśli podana jest *dateofissu* np. 1 stycznia 2010, a *period* wynosi 6 miesięcy to pierwszy kupon zostanie wypłacony, zgodnie z konwencją notowania obligacji, 1 czerwca.

IRSPrice(contractdate, firstpaymentoffset, dateofissue, periodfixed, maturityfixed, convfixed, Nfixed, R, ratefloat, periodfloat, maturityfloat, convfloat, Nfloat)

Argumenty wymagane:

contractdate – data wyceny kontraktu,
firstpaymentoffset – *cell array* postaci {Coupon-Offset, Contract-Payment-Offset} (patrz opis "Conventions"),
dateofissue – data wystawienia instrumentu,
periodfixed – ilość czasu, co ile wypłacane są odsetki nogi stałej, podawana jako liczba całkowita albo wektor liczb całkowitych (zasada jak dla zmiennej period w BondPrice),
maturityfixed – czas trwania wypłat nogi stałej (zasada jak dla zmiennej maturity w BondPrice),
convfixed – konwencja liczenia czasu dla nogi stałej,
Nfixed – nominal nogi stałej, podawany jako liczba całkowita albo wektor liczb całkowitych (zasada jak dla zmiennej coupon w BondPrice),
R – wielkość oprocentowania nogi stałej, podawana jako liczba rzeczywista albo wektor liczb rzeczywistych (zasada jak dla zmiennej coupon w BondPrice),
ratefloat – stopa referencyjna nogi zmiennej podawana jako liczba całkowita albo wektor liczb całkowitych (podawana jako liczba miesięcy stopy LIBOR, która jest stopą referencyjną).

Argumenty opcjonalne, niepodanie ich powoduje wartość analogiczną jak dla nogi stałej:

periodfloat – ilość czasu, co ile wypłacane są odsetki nogi zmiennej (zasada jak dla zmiennej periodfixed),
maturityfloat – czas trwania wypłat nogi zmiennej (zasada jak dla zmiennej maturityfixed),
convfloat – konwencja liczenia czasu dla nogi zmiennej,
Nfloat – nominal nogi zmiennej (zasada jak dla zmiennej Nfixed).

Przykład 1: IRSPrice(01-Jan-2010, {2,2}, 01-Jan-2010, 12, "12M", {"ACT/ACT", "sfbd", "warsaw", 0, +1, 1}, 100000, 0.05, 6) to wycena rocznego kontraktu FRA, liczona na 1 stycznia 2010, który opiera się o stopę procentową stałą 5 procent i libor 6 miesięczny.

Przykład 2: IRSPrice(01-Jan-2010, {2,2}, 01-Jan-2010, 12, "2Y", {"ACT/ACT", "sfbd", "warsaw", 2, +1, 1}, 100000, 0.05, 1) to wycena 2 letniego kontraktu IRS, liczona na 1 stycznia 2010, którego noga stała opiera się na stopie rocznej i jest płatna 1 stycznia 2011 oraz 1 stycznia 2012, a noga zmienna opiera się na stopie 1 miesięcznego liboru i jest płatna w tych samych terminach (rzeczywiste terminy płatności to 4 stycznia 2011 oraz 3 stycznia 2012).

Zwracane wartości: Cena IRS.

Komentarz

Podobnie jak dla obligacji zmiennymi definiującymi IRS są *periodfixed* i *periodfloat*. Jeśli odpowiednia zmienna jest pojedynczą liczbą całkowitą jest ona interpretowana jako stała długość okresu odsetkowego. Wtedy IRS płaci odpowiednie kupony w datach *datesfixed* (lub *datesfloat1*) równo rozłożonych od *dateofissue* do zapadalności. Jeśli odpowiednia zmienna jest wektorem liczb całkowitych to wektor ten wyznacza długości poszczególnych okresów odsetkowych (a tym samym odpowiednie daty). W takiej sytuacji informacja o terminie do zapadalności jest ignorowana (zakłada się, że użytkownik prawidłowo podzielił czas do zapadalności pomiędzy poszczególne okresy odsetkowe).

Zmienne *Nfixed* i *R* ustalają wielkości poszczególnych płatności odsetkowych nogi stałej. Jeśli są to wektory o długości równej liczbie *datesfixed*, to w każdej *datesfixed* płacony jest kupon w wysokości ustalonej przez iloczyn odpowiednich składowych wektorów *Nfixed* i *R*. W przeciwnym przypadku wszystkie płacone kupony są równe $Nfixed(1)*R(1)$.

Zmienne *Nfloat* i *ratefloat* ustalają wielkości poszczególnych płatności odsetkowych nogi zmiennej. Jeśli są to wektory o długości równej liczbie *datesfloat1*, to w każdej *datesfloat1* płacony jest kupon w wysokości ustalonej przez iloczyn odpowiednich składowych wektorów *Nfloat* i *ratefloat*. W przeciwnym przypadku wszystkie płacone kupony są równe $Nfloat(1)*ratefloat(1)$.

Podawanie argumentów opcjonalnych musi być wykonane w odpowiedniej kolejności, tzn. jeśli chcemy kontrakt o innym nominale dla nogi zmiennej a tych samych konwencjach, musimy mimo wszystko podać $periodfloat = periodfixed$, $maturityfloat = maturityfixed$ i $convfloat = convfixed$.

IRSIAPrice(contractdate, firstpaymentoffset, dateofissue, periodfixed, maturityfixed, convfixed, Nfixed, R, ratefloat, method, periodfloat, maturityfloat, convfloat, Nfloat)

Argumenty wymagane – takie same jak dla IRSPrice, dodatkowo method – wybór metody aproksymacji volatility capletów potrzebna do obliczenia *convexity adjustment* dla IRS in arrears.

Argumenty opcjonalne – takie same jak dla IRSPrice.

Zwracane wartości: Cena IRS in arrears.

CreateBond(dateofissue, period, maturity, coupon, nominal, conv)

Jest to funkcja pomocnicza wywoływana w czasie realizacji funkcji BondPrice. Jej argumenty są przekazywane przez tę funkcję.

Zwracane wartości: Wszystkie argumenty potrzebne funkcji BondPrice.

CreateIRS(dateofissue, periodfixed, maturityfixed, convfixed, Nfixed, R, ratefloat, periodfloat, maturityfloat, convfloat, Nfloat)

Jest to funkcja pomocnicza wywoływana w czasie realizacji funkcji IRSPPrice i IRSIAPrice. Jej argumenty są przekazywane przez te funkcje.

Zwracane wartości: Wszystkie argumenty potrzebne funkcjom IRSPPrice, IRSIAPrice oraz dodatkowe argumenty wykorzystywane przez funkcje SwaptionPrice i funkcje wyceniające skomplikowane kontrakty swap.

Bibliografia

- [1] Włodzimierz Waluś – "Inżynieria finansowa. Wykłady".
- [2] John Hull – "Options, Futures and Other Derivatives".