Wycena convertible bonds na drzewie dwumianowym

Tomasz Tkaliński

8 maja 2009

Wprowadzenie

Celem tej pracy jest opisanie implementacji modelu wyceny convertible bond. Instrumenty dłużne zwane convertible bonds to (kuponowe) obligacje z wpisanym dodatkowo prawem, do wymiany papierów na ustaloną wcześiej liczbę akcji emitenta. Jeżeli do momentu zapadalnośći nie nastąpi wymiana, posiadacz obligacji otrzymuje nominał i ostatni kupon.

1 Opis problemu

1.1 Convertible bonds (CB) jako instrumenty pochodne

Dwia ujęcia CB

1. W ujęciu **długu** emitenta CB=obligacja+opcja call na wymianę obligacji na akcje emitenta.
2. W ujęciu **kapitału własnego** emitenta CB=akcje + opcja put na wymianę akcji na obligację + swap, który pozwala oddać dywidendy z akcji za kupony z obligacji.

Korzyści płynące z używania convertible bonds

1. Dla emitenta:
    - obniżenie kosztów finansowania na rynku długu,
    - uzyskanie dostępu do rynku długu przez firmy o niższej wiarygodności,

- uzyskanie płynnego przejścia od finansowania na rynku długu do zwiększenia kapitału własnego.

2. Dla nabywcy:
   - bardziej stabilny dochód niż z akcji,
   - rentowność wyższa niż wynikająca z dywidend akcji,
   - uzyskanie płynnego przejścia od finansowania na rynku długu do zwiększenia kapitału własnego.

1.2 Pojęcia związane z opisem convertible bonds

nominał - kwota wykupu obligacji w momencie zapadalności

kupon - procent nomianału (wyrażony w skali roku) wypłacany posiadaczowi obligacji

częstość kuponu - ile razy do roku płacony jest kupon

współczynnik konwersji - ile akcji za jedną obligację otrzymuje posiadacz, gdy zdecyduje się na zamianę

cena konwersji - cena jednej akcji otrzymywanej na drodze wymiany. Cena konwersji = nomianał/(współczynnik konwersji)

parytet - rynkowa wartość akcji otrzymywanych na drodze wymiany

data pierwszej konwersji - pierwszy moment, w którym może nastąpić wymiana

call provisions - prawo emitenta do odkupienia obligacji przed chwilą zapadalności. **Call schedule** to zestawienie chwil czasu i ustalonych dla nich wcześniej cen, po których emitent może odkupić obligację

stock perfrormance call provisions - zastrzeżenia w umowie, które określają, że emitent może odkupić obligacje jedynie wtedy, gdy ceny akcji wzrosną do ustalonego wcześniej poziomu (zwykle ok. 150% ceny konwersji)

put provisions - prawo nabywcy do odsprzedania obligacji emitentowi przed chwilą zapadalności. **Put schedule** to zestawienie chwil czasu i ustalonych dla nich wcześniej cen, po których nabywca może odsprzedać obligację

1.3 Zmienne rynkowe

1. S_0 - obecna cena akcji
2. σ - zmienność cen akcji
3. δ - stopa dywidendy
4. r - stopa wolna od ryzyka
5. d - stopa procenowa dla długu z ryzykiem kredytowym (r+*spread kredytowy*)

2 Model

Przedstawimy teraz jeden z modeli wyceny CB.

2.1 Zmienne

Rynkowe parametry modelu

1. S_0 - początkowa cena akcji
2. r - stopa wolna od ryzyka
3. d - stopa wolna od ryzyka powiększona o spread kredytowy
4. δ - stopa dywidendy
5. σ - zmienność cen akcji
6. T - horyzont czasowy rynku (w latach)
7. n (M) - ilość podokresów w roku (wszystkich kroków do chwili T)

Parametry convertible bond

1. *coupon* - kupon (procent nomianału wypłacany w ciągu roku)

2. *face value* - nominał obligacji

3. *conv ratio*- współczynnik konwersji

4. n - ilość podokresów w roku

5. *call dates* - chwile, w których emitent może dokonać wykupu obligacji

6. *call schedule* - ceny, po których emitent może odkupić obligację w odpowiednich chwilach czasu określonych przez *call dates*

7. *put dates* - chwile, w których nabywca może dokonać odsprzedania obligacji emitentowi

8. *put schedule* - ceny, po których nabywca może dokonać odsprzedania obligacji emitentowi w odpowiednich chwilach czasu określonych przez *put dates*

2.2 Założenia modelu

1. Obserwacje cen i transakcje zawierane są w chwilach czasu
$$\mathcal{T} = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{nT-1}{n}, T\}.$$

2. Nie ma kosztów transakcyjnych.

3. Inwestorzy mogą zajmować nieograniczone pozycje długie i krótkie w akcjach, oraz jednostkach rachunku bankowego, przy czym pożyczki i lokaty są oprocentowane z tą samą stopą r (w skali roku).

4. Rynek jest wolny od arbitrażu.

5. Ewolucję procesu cen akcji zadaje S_0 oraz ciąg zmiennych losowych $(U_t)_{t=1}^T$, przy czym dla $t > 0$ mamy $S_t = S_{t-1}U_t$, gdzie
$$\mathbb{P}(U_t = u) = p = 1 - \mathbb{P}(U_t = d),$$
a $u = \exp(\sigma\sqrt{1/n})$, $d = \exp(-\sigma\sqrt{1/n})$ oraz $p = 0.5$.

6. W chwili $t = 0$ emitowany jest *convertible bond* ze specyfikacją określoną przez parametry modelu.

7. Moment wykupu *convertible bond* wynosi T.

8. Kupon w wysokości $interest = face\_value \cdot coupon/n$ wypłacany jest co okres.

9. Każdy element wektorów *call dates* i *put dates* jest elementem zbioru $\mathcal{T}$ lub jest równy -1[1].

10. Stopy ptocentowe r, d oraz stopa dywidendy δ są nieujemne i deterministyczne.

Problem

Znaleźć cenę convertible bond w rozoważanym modelu.

3 Rozwiązanie

Cenę convertible bond określimy, jako cenę minimalnego zabezpieczenia wypłaty z tego instrumentu. Aby ją wyliczyć stosujemy algorytm oparty na indukcji wstecznej. Opiszemy teraz schemat algorytmu.

3.1 Opis ogólny algorytmu

1. Wczytaj parametry modelu

2. Wylicz u, d, p.

3. Generuj drzewo cen akcji.

4. Inicjalizuj końcowe wypłaty.

5. Wylicz prawdopodobieństwa konwersji dla czasu T.

6. Przygotuj schematy call i put

7. Wylicz cenę convertible bond.

[1] to w implementacji będzie oznaczać, że w każdej chwili emitent może dokonać odkupienia i odpowiednio nabywca może odsprzedać obligację

3.2 Opis szczegółowy algorytmu

1., 2., 3. Wczytanie paramterów, wyliczenie u, d, p oraz generowanie procesu cen akcji odbywa się w oparciu o wzory wypisane w punkcie 5. założeń modelu.

4. Wypłata końcowa wyliczana jest według wzoru

$$V_T = \max(conv\ ratio \cdot S_T, (1 + \frac{coupon}{n}) \cdot \ face\,value). \tag{1}$$

5. Prawdopodobieństwo konwersji jest równe 1, gdy inwestor dokonuje konwersji w chwili T. W przeciwnym wypadku prawdpodobieństwo to ustawiamy na 0.

6. Przygotowanie schematów *call* i *put* omówimy na przykładzie schematu call. W pierwszym kroku następuje zamiana czasów *call dates* na odpowiadające im indeksy ze zbioru $Ind\_call \subseteq \{j = 0, 1, \ldots, nT\}$. Następnie tworzymy wektor cen call (zmienna *call_sch*) w ten sposób, że dla wyznaczonych uprzednio indeksów Ind_call wpisujemy odpowiadające im ceny z wektora $call\_schedule$, a na pozostałych współrzędnych kładziemy ∞. Analogicznie postępujemy dla schematu *put*, przy czym zamiast ∞, wstawiamy $-\infty$.

7. Gdy mamy zainicjowane prawdopodobieństwa konwersji i wypłaty końcowe, wyliczenie ceny obligacji przebiega wstecz, przy czym rekursja realizowana jest w pętli, której jeden obrót opisujemy poniżej.
Załóżmy, że policzone mamy ceny *convertible bonds* w warstwie $j + 1 \in \{1, \ldots, nT\}$, które będziemy oznaczać przez $V_{l,j+1}$ dla $l = 0, \ldots, j{+}1$. Rozważmy obliczenia wykonane dla jednego ustalonego i-tego węzła w drzewie cen w wartstie j. Przyjmimy, że następniki węzła (i, j) w tym drzewie oznaczono przez $(i, j + 1)$ oraz $(i + 1, j + 1)$. Wówczas

- *credit-adjusted discount rate*, czyli stopę procentową używaną do dyskontowania wypłat przyszłych z uwzględnieniem ryzyka kredytowego obligacji wyliczamy według wzoru
$$risky\_rate_{k,l} = rp_{k,l} + d(1 - p_{k,l}), \tag{2}$$
dla $(k, l) = (i, j + 1)$ lub $(k, l) = (i + 1, j + 1)$

- *holding value*, czyli wartość *convertible bond* wynikająca z przyszłych wypłat i płatności kuponowej wynosi

$$
\begin{aligned}
H_{i,j} &= \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{V_{i+1,j+1}}{1 + risky\_rate_{i+1,j+1}/n} + \frac{V_{i,j+1}}{1 + risky\_rate_{i,j+1}/n}\right) \\
&+ interest, \qquad (3)
\end{aligned}
$$

  gdzie $interest$ oznacza odpowiednią płatność kuponową równą $coupon \cdot face\_value/n$.

- $call\_value$ i put_value wyliczane są w oparciu o $call\_schedule$ i $put\_schedule$ odpowiednio, przy czym wielkości wynikające ze schematów, powiększa się o $interest$.

- nabywca może zdecydować się na zamianę obligacji na akcje emietenta, co zapewni jego pozycji wartość co najmniej $parity = conv\_ratio \cdot S_{i,j}$, gdzie $S_{i,j}$ jest ceną akcji w węźle (i, j) drzewa.

- Ponieważ zakładamy, że zarówno emitent, jak i nabywca zachowują się racjonalnie, wartość convertible bond w węźle (i, j) wyraża się wzorem

$$V_{i,j} = \max(parity, put\_value, min(H_{i,j}, call\_value)). \qquad (4)$$

- ustawiamy prawdopodobieństwa konwersji dla j-tej wartstwy drzewa według reguły

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1 & gdy\ V_{i,j} = parity \\ 0 & gdy\ V_{i,j} \in \{put\_value,\ call\_value\} \\ 0.5 \cdot (p_{i,j+1} + p_{i+1,j+1}) & wpp, \end{cases} \qquad (5)$$

4 Testy

4.1 Opis testów

W procesie testowania zbadano

1. czy algorytm wyceniający zachowuje zależności ceny od parametrów zgodnie z obserwacjami rynkowymi?

2. czy algorytm wykonuje się przy dużej liczbie kroków na drzewie?

3. czy pojawiają się jakieś "dziwne" wyniki i z czego mogą wynikać?

Teraz omówimy dokładniej zastosowane testy.

1. We wszystkich wykonywanych w tej części testach rozważono convertible bond w następującej specyfikacji:

Face value	100
Coupon	6%
Conversion ratio	1
Maturity	2, 5, 10 years
Calls	several schemes
Puts	several schemes

Ponadto model rynku zadany jest przed parametry

Volatility	20%
Riskless rate	5%
Stock loan rate	5%
Dividend yield	2%
Credit spread	100 basis points
Stock price S_0	100

Wycena odbywała się w $M = 300$ krokach. Testy $1-4$ dotyczą obligacji bez schematów call i put.
Test 1: Zależność wartości od parytetu dla obligacji zapadających za 2, 5 i 10 lat.
Test 2: Zależność wartości od volatility dla obligacji zapadających za 2, 5 i 10 lat.
Test 3: Zależność wartości od riskless rate dla obligacji zapadających za 2, 5 i 10 lat.
Test 4: Zależność wartości od credit spread dla obligacji zapadających za 2, 5 i 10 lat.
Testy $5-8$ dotyczą obligacji zapadających za 10 lat.
Test 5: Zależność wartości od parytetu dla opcji ze schematami: non-callable, 140 call, 120 call, przy czym w dwóch ostatnich przypadkach wykup przez emitenta może nastąpić przez cały czas życia obligacji.

Test 6: Zależność wartości od parytetu dla opcji ze schematami non-putable, 120 put, 140 put, przy czym w dwóch ostatnich przypadkach inwestor może dokonać sprzedaży obligacji 5 lat przed momentem wykupu.
Test 7: Zależność wartości od stopy wolnej od ryzyka dla opcji ze schematami non-callable, 140 call, 120 call, przy czym w dwóch ostatnich przypadkach wykup przez emitenta może nastąpić przez cały czas życia obligacji.
Test 8: Zależność wartości od stopy procentowej dla opcji ze schematami non-putable, 120 put, 140 put, przy czym w dwóch ostatnich przypadkach inwestor może dokonać sprzedaży obligacji 2 lata przed momentem wykupu.

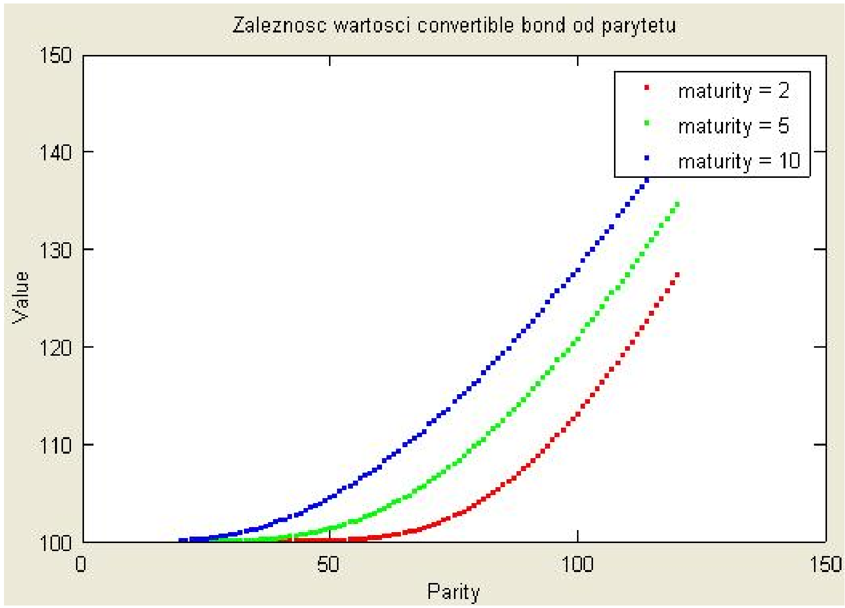
2. W modelu z punktu 1. i dla określonego tam convertible bond z $T = 1$ bez calls i puts wykonano szereg testów, w których zmianie ulegał parametr M - liczba kroków w drzewie dwumianowym. Uruchamiano program z $M = 10, 100, 1000, 10000, 20000, 50000, 100000$.

3. W modelu z punktu 1. i dla określonego tam convertible bond wykonano opisany w punkcie 1. **Test 7** dla $M = 50$ i $M = 500$. Zaobserwowane nieciągłości fukncji wartości obligacji względem stopy wolnej od ryzyka przeanalizowano poniżej.

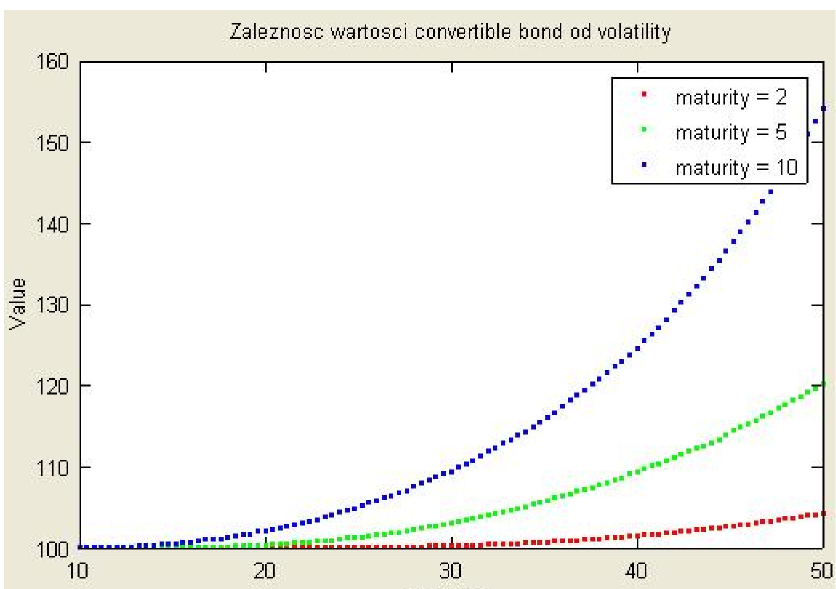
Wszystkie pliki z danymi wejściowymi są załączone wraz z kodem programu. Natomiast plik *cb_test.m* zawiera kod programu wraz z kodami **Testów 1-8** oraz testów na czas wykonania.

4.2 Opis uzyskanych wyników

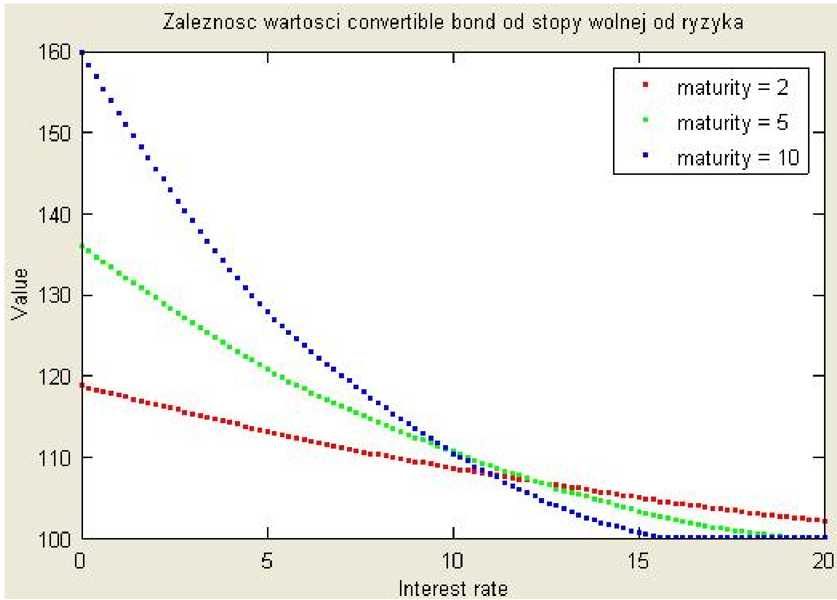
W tej części przedstawimy wyniki omówionych powyżej testów.

1. 

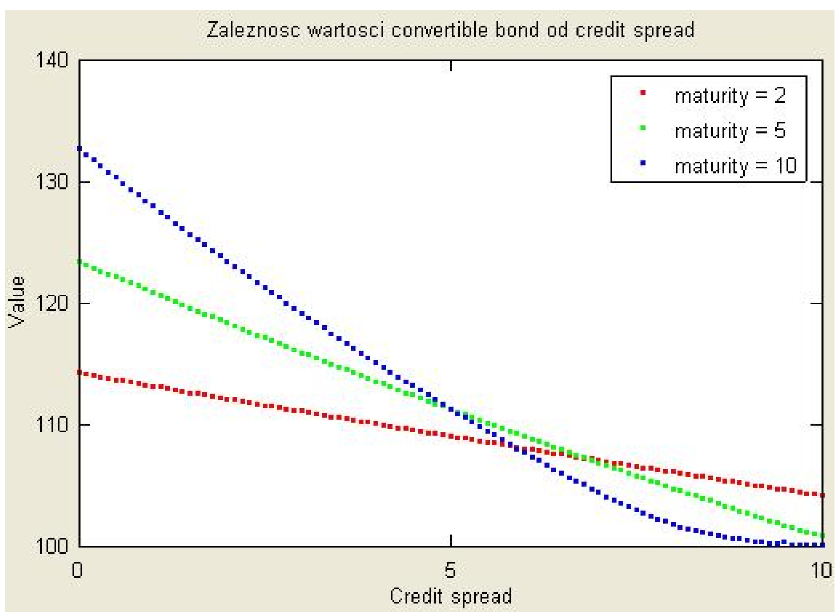
Rys. 1 *Test 1*



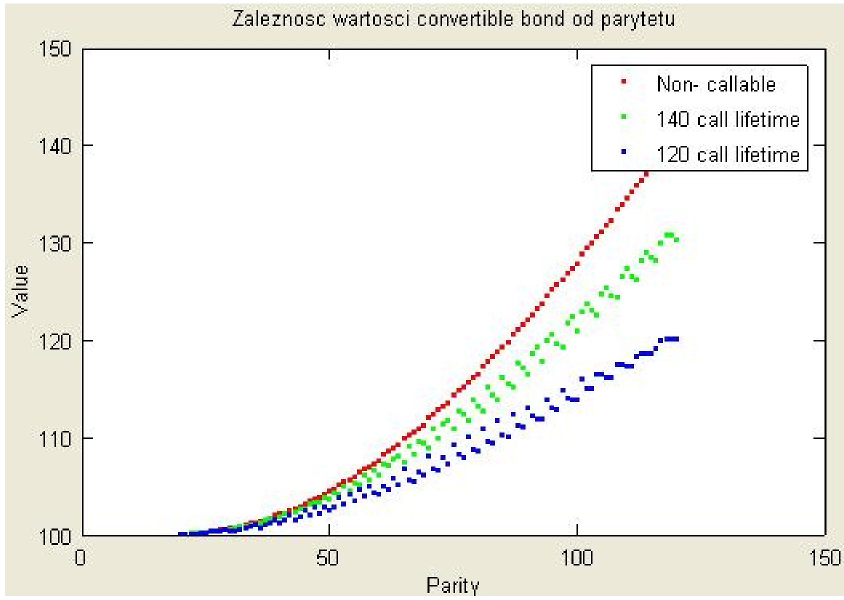
Rys. 2 *Test 2*



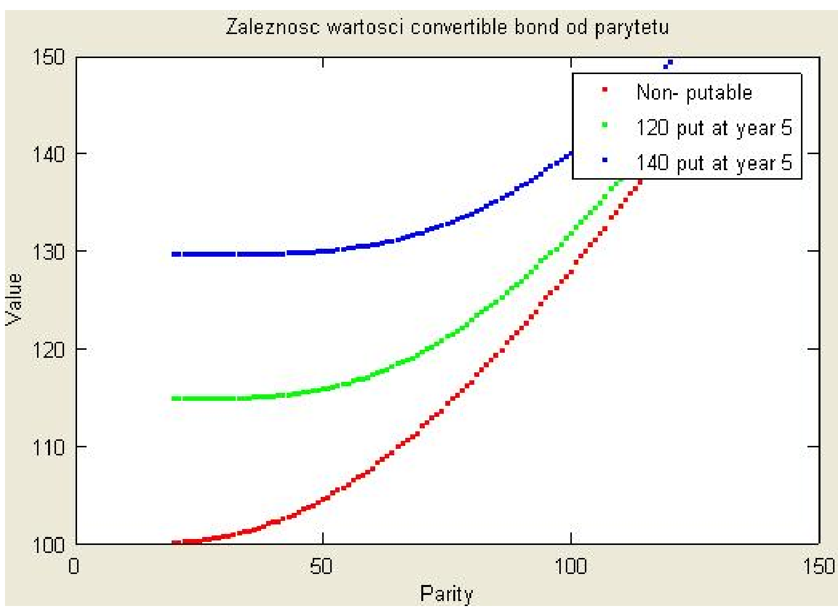
Rys. 3 *Test 3*



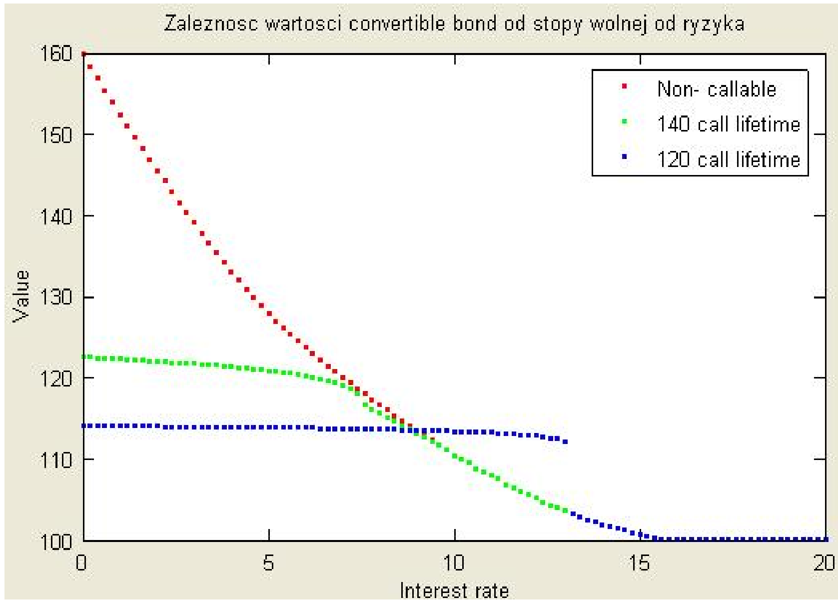
Rys. 4 *Test 4*



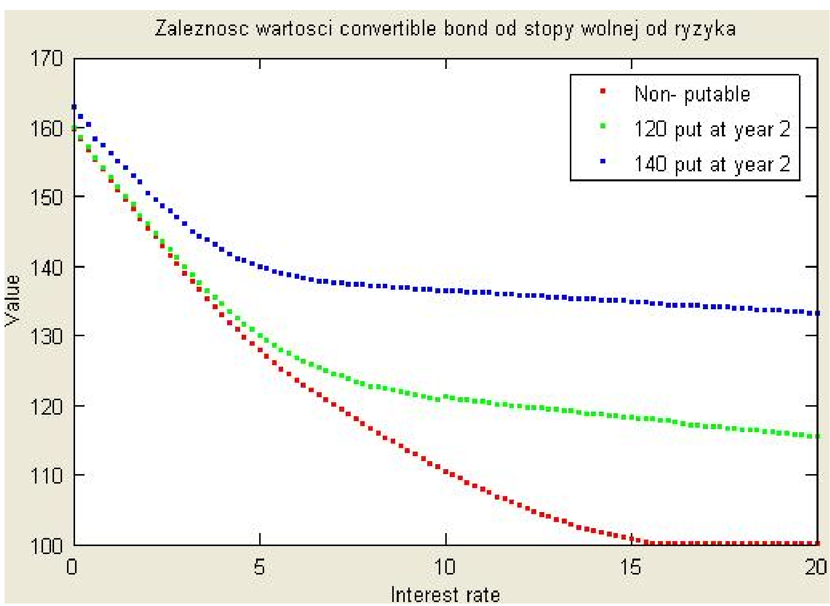
Rys. 5 *Test 5*



Rys. 6 *Test 6*



Rys. 7 *Test 7*



Rys. 8 *Test 8*

Otrzymane wyniki pozostają w zgodzie z wynikami zaprezetnowanymi w pracy [Derman], a przez to odzwierciedlają wpływ czynników na cenę obligacji zgodnie z obserwacjami rynkowymi.

Przypominamy, że w testach $1-4$ obligacje nie zawierają klauzul call ani put.
Test1: Ceteris paribus, wartość convertible bond jest rosnącą funkcją parytetu, przy czym przyrost wartości rośnie wraz z czasem do zapadalności.
Test2: Ceteris paribus, wartość convertible bond jest rosnącą funkcją volatility, przy czym przyrost wartości rośnie wraz z czasem do zapadalności.
Test3: Ceteris paribus, wartość convertible bond jest malejącą funkcją stopy wolnej od ryzyka, przy czym spadek wartości rośnie wraz z czasem do zapadalności.
Test4: Ceteris paribus, wartość convertible bond jest malejącą funkcją credit spread, przy czym spadek wartości rośnie wraz z czasem do zapadalności.

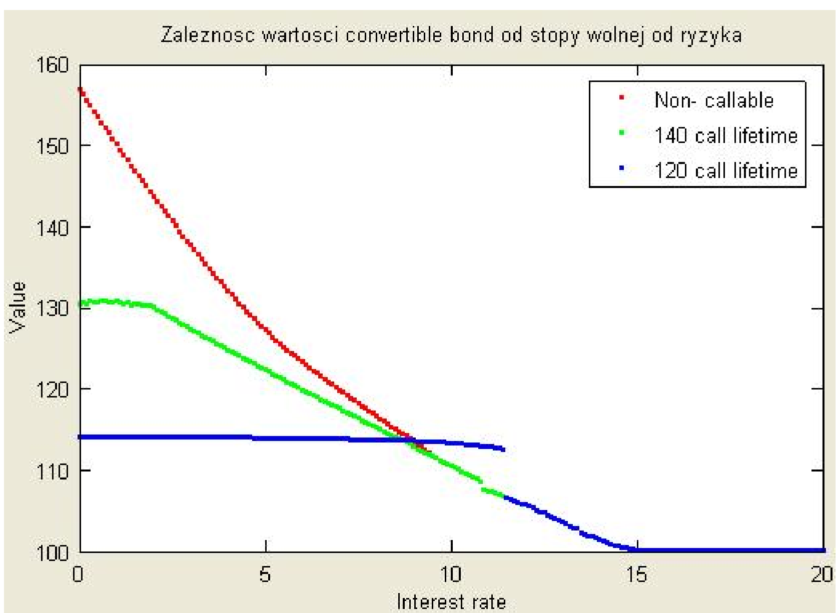
W testach $5-8$ rozważano obligacje z terminem wykupu $T = 10$ oraz klauzulami call albo put.
Test5: Ceteris paribus, wartość convertible bond jest wykazuje wzrostową tendencję względem parytetu, przy czym przyrost wartości rośnie wraz z ceną, po której emitent może dokonać wcześniejszego wykupu. W szczególności najwyższą wartość ma obligacja non-callable. Zauważamy, że w tym przypadku obecność klauzuli call może zaburzyć monotoniczność wartości (obserwowany efekt jest zależny również od M)
Test6: Ceteris paribus, wartość convertible bond jest rosnącą funkcją parytetu, przy czym przyrost wartości rośnie wraz z ceną, po której nabywca może dokonać wcześniej sprzedaży obligacji. W szczególności najniższą wartość ma obligacja non-putable.
Test7: Ceteris paribus, wartość convertible bond jest malejącą funkcją stopy wolnej od ryzyka, przy czym spadek wartości rośnie wraz z ceną, po której emitent może dokonać wcześniejszego wykupu. W szczególności najwyższą wartość ma obligacja non-callable. W teście tym zauważamy nieciągłość ceny. Przypadek ten zbadano dokładnie dla $M = 50$. Opis wyników znajduje się poniżej, ale jej cena szybko spada.
Test8: Ceteris paribus, wartość convertible bond jest malejącą funkcją stopy wolnej od ryzyka, przy czym spadek wartości rośnie wraz z ceną,

po której nabywca może dokonać wcześniejszego wykupu. W szczególności najniższą wartość ma obligacja non-putable.

2. Wyniki testów, w których zbadano zależność czasu wykonania programu od M - liczby kroków w drzewie.

M	Wartość CB	Czas (s)
10	108.588827	0.0930569
100	109.031521	0.127716
1000	109.100324	4.15576
10000	109.113511	90.3443
20000	109.114964	368.241
50000	109.116186	2126.45
100000	109.116778	11743.5

3. W trakcie testowania programu zauważono niepokojące zjawisko (np. dla $M = 50$), które przedstawione jest na rys. 9.



Rys. 9 *Nieciągłość ceny względem stopy wolnej od ryzyka.*

Skąd bierze się nieciągłość wartości CB względem zmian stopy wolnej od ryzyka? Widzimy, że problem pojawia się dla CB z call na poziomie

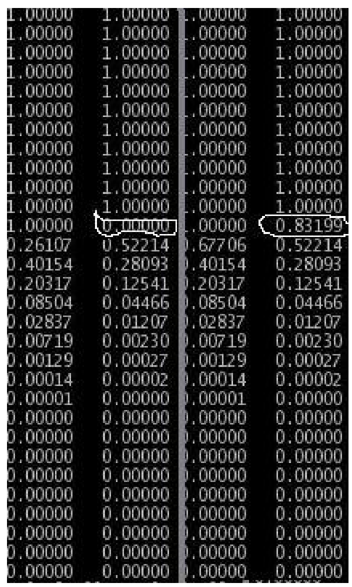
120. Zaobserwowany skok to spadek wartości CB z poziomu 112.51 do 106.6 przy zmianie r z $r_1 = 11.4\%$ do $r_2 = 11.5\%$. Przeanalizowaliśmy wartości CB w drzewie, na którym dokonywana jest indukcja wsteczna i zauważyliśmy, że w pewnym kroku, w pewnym węźle pojawia się znaczna rozbieżność wartości CB otrzymanych przy r_1 oraz r_2. Poniżej zamieszczamy wydruki z pośrednich obliczeń programu, które, przedstawiają fragmenty drzewa, w których zaobserwowano rozbieżności.

1.5720e+003	1.4376e+003	1.5717e+003	1.4373e+003
1.3147e+003	1.2023e+003	1.3145e+003	1.2021e+003
1.0996e+003	1.0056e+003	1.0993e+003	1.0054e+003
9.1965e+002	8.4107e+002	9.1947e+002	8.4090e+002
7.6921e+002	7.0350e+002	7.6906e+002	7.0336e+002
6.4341e+002	5.8846e+002	6.4329e+002	5.8835e+002
5.3822e+002	4.9227e+002	5.3811e+002	4.9218e+002
4.5026e+002	4.1183e+002	4.5017e+002	4.1175e+002
3.7670e+002	3.4457e+002	3.7663e+002	3.4451e+002
3.1519e+002	2.8833e+002	3.1513e+002	2.8827e+002
2.6376e+002	2.4130e+002	2.6371e+002	2.4125e+002
2.2076e+002	2.0197e+002	2.2071e+002	2.0193e+002
1.8479e+002	1.6908e+002	1.8476e+002	1.6905e+002
1.5472e+002	1.4159e+002	1.5469e+002	1.4156e+002
1.3099e+002	1.2121e+002	1.3042e+002	1.2115e+002
1.1491e+002	1.0955e+002	1.1430e+002	1.0947e+002
1.0634e+002	1.0416e+002	1.0626e+002	1.0410e+002
1.0286e+002	1.0204e+002	1.0281e+002	1.0201e+002
1.0161e+002	1.0138e+002	1.0159e+002	1.0136e+002
1.0127e+002	1.0122e+002	1.0126e+002	1.0122e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002

Rys. 10 *Rozbieżność holding values*

Na wydruku 10 widzimy wylistowane *holding values*. Pierwsze dwie kolumny to dwa kroki czasowe wyliczeń dla r_1, a następne dwie kolumny to te same kroki czasowe i obliczenia dla r_2. Zakreślone wartości choć różnią się nieznacznie, są kluczowe. Zakreślona liczba w drugiej kolumnie jest większa niż $call\_value = 121.2$, co sprawia, że w tym węźle emitent odkupuje obligację. Sytuacja ta nie występuje w przypadku obliczeń w czwartej kolumnie, gdzie zakreślona wartość jest poniżej $call\_value$. Ta niewielka różnica przekłada się jednak na prawdopodobieństwa konwersji wyliczane w tym kroku.
Na rysunku 11 pokazana jest istotna różnica. W przypadku, gdy emitent

odkupuje obligacje, prawdopodobieństwo konwersji ustawiane jest na $p = 0$, zgodnie ze wzorem (5), podczas gdy w drugim przypadku prawodopodobieństwo konwesrji wynosi około $p = 0.83$. Przy r na poziomie 11.4% oraz $d = 6\%$ w obu przypadkach otrzymujemy znacznie odbiegające od siebie *credit-adjusted discount rates* (oznaczane $risky\_rates$) wyliczane według wzoru (2).



1.00000	1.00000	.00000	1.00000
1.00000	1.00000	.00000	1.00000
1.00000	1.00000	.00000	1.00000
1.00000	1.00000	.00000	1.00000
1.00000	1.00000	.00000	1.00000
1.00000	1.00000	.00000	1.00000
1.00000	1.00000	.00000	1.00000
1.00000	1.00000	.00000	1.00000
1.00000	1.00000	.00000	1.00000
1.00000	1.00000	.00000	1.00000
1.00000	1.00000	.00000	1.00000
1.00000	0.00000	.00000	0.83199
0.26107	0.52214	.67706	0.52214
0.40154	0.28093	.40154	0.28093
0.20317	0.12541	.20317	0.12541
0.08504	0.04466	.08504	0.04466
0.02837	0.01207	.02837	0.01207
0.00719	0.00230	.00719	0.00230
0.00129	0.00027	.00129	0.00027
0.00014	0.00002	.00014	0.00002
0.00001	0.00000	.00001	0.00000
0.00000	0.00000	.00000	0.00000
0.00000	0.00000	.00000	0.00000
0.00000	0.00000	.00000	0.00000
0.00000	0.00000	.00000	0.00000
0.00000	0.00000	.00000	0.00000
0.00000	0.00000	.00000	0.00000
0.00000	0.00000	.00000	0.00000
0.00000	0.00000	.00000	0.00000
0.00000	0.00000	.00000	0.00000

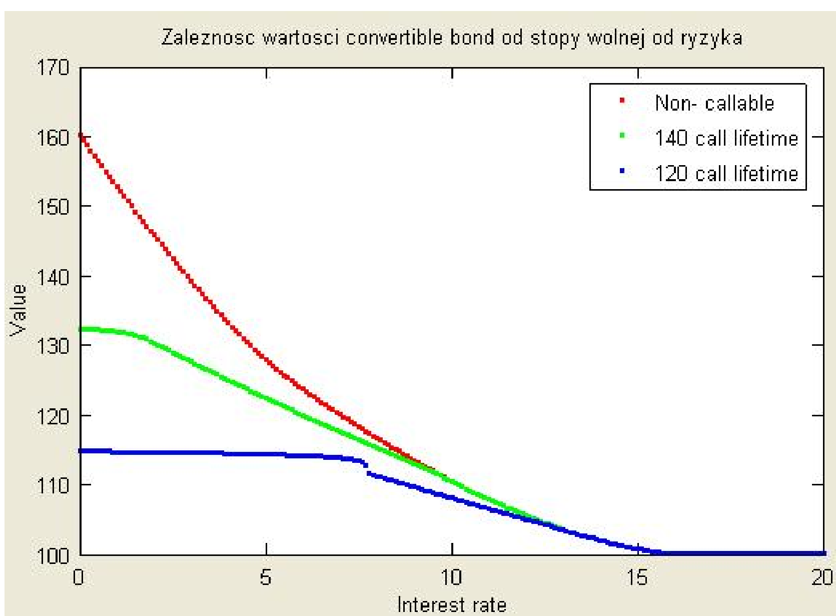
Rys. 11 *Rozbieżność prawdopodobieństw konwersji.*

Ostatecznie rozbieżność czynników dyskontowych przekłada się na zaobserwowaną nagłą i znaczącą rozbieżność (aż 0.6) wartości obligacji otrzymywanych w kroku wstecz (rysunek 12).

1.6002e+003	1.4633e+003	1.6002e+003	1.4633e+003
1.3381e+003	1.2236e+003	1.3381e+003	1.2236e+003
1.1189e+003	1.0232e+003	1.1189e+003	1.0232e+003
9.3565e+002	8.5559e+002	9.3565e+002	8.5559e+002
7.8239e+002	7.1545e+002	7.8239e+002	7.1545e+002
6.5424e+002	5.9826e+002	6.5424e+002	5.9826e+002
5.4707e+002	5.0027e+002	5.4707e+002	5.0027e+002
4.5746e+002	4.1832e+002	4.5746e+002	4.1832e+002
3.8253e+002	3.4980e+002	3.8253e+002	3.4980e+002
3.1987e+002	2.9251e+002	3.1987e+002	2.9251e+002
2.6748e+002	2.4459e+002	2.6748e+002	2.4459e+002
2.2367e+002	2.0453e+002	2.2367e+002	2.0453e+002
1.8703e+002	1.7103e+002	1.8703e+002	1.7103e+002
1.5639e+002	1.4301e+002	1.5639e+002	1.4301e+002
1.3078e+002	1.2120e+002	1.3078e+002	1.2115e+002
1.1491e+002	1.0955e+002	1.1430e+002	1.0947e+002
1.0634e+002	1.0416e+002	1.0626e+002	1.0410e+002
1.0286e+002	1.0204e+002	1.0281e+002	1.0201e+002
1.0161e+002	1.0138e+002	1.0159e+002	1.0136e+002
1.0127e+002	1.0122e+002	1.0126e+002	1.0122e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002
1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002	1.0120e+002

Rys. 12 *Nagła i znaczna rozbieżność wartości CB*

Istotna jest zależność wyników od M. Np.: opisany powyżej problem nie pojawia się już tak istotnie dla $M = 500$ (rys. 13)



Rys. 13 *Wyliczenia cen CB przy* $M = 500$

5 Dokumentacja programu

5.1 Input

Opis plików

Dane potrzebne do wykonania obliczeń umieszczamy w pliku tekstowym o nazwie *cb_dane.txt*, a kod programu znajduje się w pliku *tkalinski_cb.m*. Pliki te należy umieścić w katalogu głównym, w którym zainstalowany jest Octave (np.: $C:\backslash Program\ Files \backslash Octave$).

Dodatkowo załączono plik z kodem testów: *cb_test.m* oraz pliki z danymi do testów: *dp_dane_test1l.txt*, *dp_dane_test1al.txt*, *dp_dane_test2l.txt*, *dp_dane_test3pl.txt*, *dp_dane_test3p2l.txt*, *dp_dane_test_compl1.txt*. Aby wykonać testy również należy umieścić wszystkie te pliki w głównym katalogu Octave.

Uruchamianie

Uruchamianie programów odbywa się poprzez wpisanie ich nazwy w konsoli Octave.

Typy danych i ich specyfikacja

Poniżej wymieniamy zmienne wraz z ewentualnymi uwagami dotyczącymi konwencji przyjętych w programie:

- *So*, type: scalar, początkowa cena akcji,
- *r*, type: scalar, stopa wolna od ryzyka (należy podać w konwencji procent prosty (w ułamku, a nie w procentach), stopy wyrażone w skali roku),
- *d*, type: scalar, stopa wolna od ryzyka **powiększona** o spread kredytowy,
- *delta*, type: scalar, stopa dywidendy,
- *sigma*, type: scalar, zmienność,
- *T*, type: scalar, zapadalność obligacji, założenie: $T \in \mathbb{N}_+$,

- $face\_value$, type: scalar, nominał,
- $coupon$, type: scalar, kupon, należy podać w konwencji procent prosty (w ułamku, a nie w procentach, stopy wyrażone w skali roku,
- $conv\_ratio$, type: scalar, współczynnik konwersji,
- n, type: scalar, ilość kroków w drzewie dwumianowym przypadająca na każdy rok do momentu zapadalności. Jeżeli $n = 0$, to wtedy program uznaje, że ilość kroków w drzewie wyznaczona jest przez M (patrz niżej) i nie zależy od liczby lat T. Wtedy program dokonuje przypisania $n = M/T$,
- M, type: scalar, ilość kroków w drzewie dwumianowym, która jest uwzględniana tylko wtedy, gdy $n = 0$. W przeciwnym przypadku program dokona przypisania $M = n \cdot T$,
- $call\_schedule$, type: matrix, wektor cen, po których emitent może wcześniej odkupić obligację. Jego długość musi być równa długości wektora $call\_dates$. Przyjęto konwencję, że wartość Inf oznacza, że opcji nie można wykupić w danej dacie,
- $call\_dates$, type: matrix, chwile, w których emitent może dokonać wykupu obligacji, elementy tego wektora należą do $\mathcal{T}$ (patrz rozdział 2.2.) $call\_dates = -1$ oznacza, że obligację można odkupić w każdym kroku,
- $put\_schedule$, type: matrix, wektor cen, po których nabywca może wcześniej sprzedać obligację. Jego długość musi być równa długości wektora put_dates (patrz niżej). Przyjęto konwencję, że wartość $-Inf$ oznacza, że opcji nie można sprzedać w danej dacie,
- put_dates, type: matrix, chwile, w których nabywca może dokonać sprzedaży obligacji, elementy tego wektora należą do $\mathcal{T}$ (patrz rozdział 2.2.) $put\_dates = -1$ oznacza, że obligację można odsprzedać w każdym kroku.

5.2 Output

W wyniku działania programu otrzymujemy w konsoli komunikat:

Elpased time is ***t****.*
Cena convertible bond wynosi ***x****,*

gdzie **t** oznacza wyrażony w sekundach czas obliczeń, a **x** jest ceną convertible bond. Ponadto liczba **x** zapisana jest na zmiennej *cena*.

5.3 Program główny

Progam głowny składa się z trzech instrukcji:

1. Wczytaj dane.
2. Przy pomocy funkcji *cb_pricer* wylicz cenę convertible bond i zapisz wynik na zmienną *cena*.
3. Wypisz wynik na ekran.

5.4 Funkcje używane przez program

1. **function**$[n\ M] = wyznacz\_n\_i\_M(n, M, T)$
   Funkcja określa ilość kroków w drzewie. Jeżeli $n = 0$, to ilość kroków wynosić będzie M, a wtedy ilość kroków na rok ustawiana jest na $n = M/T$. W przeciwnym przypadku, n traktowane jest jako ilość kroków w jednym roku i wtedy funkcja ustawia liczbę wszystkich kroków M na $n \cdot T$.

2. **function**

   $$[put\_schedule1\ call\_schedule1] = \\ = przygotuj\_schematy(put\_schedule, put\_dates, call\_schedule, call\_dates, n, M)$$

   Funkcja buduje wektory *put_sch*, *call_sch* długości $M+1$, takie, że i-ta komórka danego wektora oznacza cenę po której można odkupić/odsprzedać convertible bond w $i-1$-tym poziomie drzewa (korzeń ma poziom 0). Jeżeli zmienna *call_dates* (*put_dates*) przyjmuje wartość -1, to oznacza to, że dla wszystkich dat obowiązuje jedna i ta sama cena.

   Funkcja dokonuje transformacji chwil czasu na indeksy w wektorze *put_sch call_sch*, np. dla call mamy: $call\_indeces \leftarrow call\_dates \cdot n + 1$, a następnie wpisuje pod tymi indeksami odpowiednie ceny, np. dla call: $call\_sch(call\_indeces) \leftarrow call\_schedule$. Komórki, które nie otrzymują w ten sposób wartości ustawiane są na Inf $(-Inf)$ w przypadku klauzuli call (put).

3. **function**

$$[ceny\_akcji\ ceny\_ost\ ceny\_przed\_ost\ up\ down\ p\_up\ p\_m] =$$
$$= ustaw\_parametry(So, r, delta, sigma, T, n, M)$$

Funkcja wylicza kolejno parametry modelu CRR potrzebne do budowy drzewa cen akcji oraz wyceny: u, d, prawdopodobieństwo martyngałowe p_m, prawdopodobieństwo w modelu równych prawdopodobieństw p, S_T (zapisane jako *ceny_ost*) oraz ceny akcji w kroku poprzedzającym chwilę T (czyli ceny akcji w $M-1$ poziomie drzewa, zapisane jako *ceny_przed_ost*).
Wektory *ceny_ost* i *ceny_przed_ost* używane są do wyliczania cen akcji w trakcie indukcji wstecznej po drzewie. W ten sposób drzewo nigdy nie jest jawnie reprezentowane, co oszczędza pamięć i pozwala rozpatrywać nawet duże drzewa przy $M = 100000$ kroków. Jednocześnie w każdym kroku ceny akcji wyznaczane są przez odpowiednie obcięcie wektora *ceny_ost* albo *ceny_przed_ost*, co pozwala uniknąć potęgowania, które może być kosztowną operacją.

4. **function**

$$ceny\_cb = inicjalizuj\_koncowe\_wyplaty$$
$$(face\_value, coupon, conv\_ratio, ceny\_akcji, n, M)$$

Funkcja wylicza wektor końcowych wypłat z convertible bond (czyli V_T) według wzoru (1) i przekazuje wynik na zmienną *ceny_cb* .

5. **function**

$$prob\_conv =$$
$$= wylicz\_prawd\_konwersji(ceny\_cb, face\_value, coupon, n, M)$$

Funkcja wylicza prawdopodobieństwo konwersji w chwili T. Jest ono równe 1, gdy nabywca dokonuje zamiany obligacji na akcje emitenta i 0 w przeciwnym przypadku.

6. **function**

$$y = conv\_bond\_price$$
$$(ceny\_cb, ceny\_ost, ceny\_przed\_ost, So, call\_schedule, put\_schedule, conv\_ratio,$$
$$prob\_conv, face\_value, coupon, p\_up, p\_m, n, M, r, d, up, down)$$

Funkcja realizuje indukcję wsteczną w pętli głównej. W każym kroku pętli wyliczane są ceny akcji w jednej rozpatrywanej aktualnie warstwie drzewa, a nastepnie wykonywane jest obliczenie kroku indukcyjnego realizowane przez funkcję $wykonaj\_krok$.

7. **function**

   $[u\ p]$ $=wykonaj\_krok$

   $(i, u, p, r, d, ceny\_akcji, call\_schedule, put\_schedule, conv\_ratio,$
   $coupon, interest, face\_value, p\_up, p\_m, n, M)$

   Dla ustalenia uwagi załóżmy, że policzone są wartość CB i prawdopodobieństwa konwersji dla $j+1$ warstwy drzewa. Funkcja wylicza kolejno:

   - czynniki dyskontowe, którymi dyskontowane będą poszczególne wartości $V_{i,j+1}$ i zapisuje je na zmienną $discount\_factor$.
   - *holding value* według wzoru (3) i zapisuje je na zmienną $H1$, a następnie przez uzupełnienie zerami rozszerza do wektora H długości $M+1$.
   - wartości CB wynikające z możliwości wcześniejszego wykupu lub odsprzedania i zapisuje je na zmienne $call\_value$ i put_value odpowiednio.
   - wartość CB płynącą z natychmiastowej konwersji i zapisuje ją na zmienną $parity$.
   - wartości CB dla j-tej warstwy według wzoru (4) i zapisuje je na zmienną V
   - prawdopodobieństwa konwersji dla j-tej warstwy drzewa według wzoru (5) i zapisuje ją na zmienną p

   Jako wynik tego jednego kroku funkcja przekazuje V i p.

8. **function**

   y $=cb\_pricer$

   $(So, r, d, delta, sigma, T, n, M, face\_value, coupon, conv\_ratio$
   $put\_schedule, put\_dates, call\_schedule, call\_dates)$

   Główna funkcja, która realizuje cały proces wyceny convertible bond na drzewie, uruchamiając kolejno funkcje:

- *wyznacz_n_i_M*,
- *ustaw_parametry*,
- *inicjalizuj_koncowe_wyplaty*,
- *wylicz_prawd_konwersji*,
- *przygotuj_schematy*,
- *conv_bond_price*.

Wynikiem działania funkcji jest liczba oznaczająca cenę (w chwili 0) convertible bond.

Literatura

[Derman] Derman, Ergener, Kani *Valuing Convertible Bonds as Derivatives* (1994) GS Quantitative Strategies Research Notes

[London] London *Modelling Derivatives in C++.* (2005) John T. Wiley & Sons, Inc.