Dokumentacja

Opcje europejskie PDE

Michał Grzelak

Spis treści

1 Ceny opcji z local volatility

1.1 Opcje plain vanilla z local volatility

Podstawową funkcją w naszym modelu jest funkcja `plain_option` obliczająca cenę opcji call lub put. Jest ona następującej postaci:

```
function price  = plain_option(S0, r0, r1, sigma, K, T, scheme, type,type1)
```

gdzie $S0$ to cena początkow, $r0$ to stopa procentowa dla waluty bazowej, $r1$ to stopa procentowa dla waluty niebazowej, K to cena wykonania, T to czas do wygaśnięcia opcji. Parametr *scheme* może przyjąć wartość 1 gdy chcemy policzyć cenę opcji przy pomocy schemtu *implict*, zaś wartość 2 gdy chcemy skorzystać ze schemtu *Crank-Nicholson*. Parametr *type* odpowiada za typ opcji: 1 (Call), 2 (Put). Przy obliczaniu wypłaty z opcji call/put korzystamy z pomocniczej funkcji `payoff`. Parametr $type1$ decyduje o tym czy cena będzie podana w walucie bazowej (1) czy też niebazowej (2). O parametrze *sigma* przyjmuje, że jest to macierz z różnymi poziomami zmienośći zależnymi od ceny aktywa bazowego i czasu.

Cena opcji jest wyliczana przy pomocy następującego równania różniczkowego Blacka-Scholesa:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r_0 - r_1)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2(S,t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r_0 V = 0$$

Schemat różnicowy dla tego równania będzie wygladał następująco:

$$A_i V_{i-1\nu-1} + B_i V_{i\nu-1} + C_i V_{i+1\nu-1} = a_i V_{i-1\nu} + b_i V_{i\nu} + b_i V_{i+1\nu}$$

To co warte zauważenia że zmienność brana w parametrach A_i, B_i, C_i będzie dla ceny s_i i chwili $t_{\nu-1}$, zaś dla parametrów a_i, b_i, c_i będzie dla ceny s_i i chwili t_ν, tj.

$$A_i = -\frac{1}{2}(\sigma^2(i,\nu-1) - (r_0 - r_1)i)\theta\delta t$$

$$B_i = 1 + (\sigma^2(i,\nu-1) + r_0)\theta\delta t$$

$$C_i = -\frac{1}{2}(\sigma^2(i,\nu-1) + (r_0 - r_1)i)\theta\delta t$$

$$a_i = \frac{1}{2}(\sigma^2(i,\nu) - (r_0 - r_1)i)(1-\theta)\delta t$$

$$b_i = 1 - (\sigma^2(i,\nu) + r_0)(1-\theta)\delta t$$

$$c_i = \frac{1}{2}(\sigma^2(i,\nu) + (r_0 - r_1)i)(1-\theta)\delta t$$

Krok na jaki dzielony jest przedział zakresu zmiennej odpowiadającej cenie aktywa oraz zakres zmiennej czasowej odbywa się za pomocą odpowiedniego nieskomplikowanego algorytmu.

Wektor końcowy cen w punktach siatki, pozwala nam obliczyć wartość opcji dla danego parametru S_0 poprzez interpolację liniową elementów z wektora cen końcowych.

Jeśli zostanie wybrana wypłata w walucie niebazowe ($type1 = 2$) to zamianie ról ulegają wartości stóp procentowych r_0 i r_1, zaś wartość opcji $V(S_0)$ jest dzielona przez S_0.

1.2 Parametry greckie

Parametry greckie zostały wyliczone zgodnie z definicją podaną na zajęciach z Finansów Obliczeniowych, poprzez zbadanie różnicy wartości opcji, gdy jeden z parametrów jest zmodyfikowany o ε, i następnie podzielenie tej różnicy przez odpowiednią wielkość. Dla *delty* jest to na przykład:

```
function [D] = delta(S0, r0,r1, sigma, K, T, scheme, type,typ)
epsilon=0.01;
D=(plain_option (S0+epsilon, r0,r1, sigma, K, T, scheme, type,typ)...
-plain_option (S0, r0,r1, sigma, K, T, scheme, type,typ))/epsilon;
endfunction
```

gdzie znaczenie parametrów jest takie jak w funkcji `plain_option`.

1.3 Opcje barierowe

Nazwy funkcji, znaczenia parametrów i fragmenty kodu dla opcji barierowych zostały zaczerpnięte z pracy Zbigniewa Matczaka zatem nie będę ich tu powtarzał.

2 Opcja azjatycka ADI

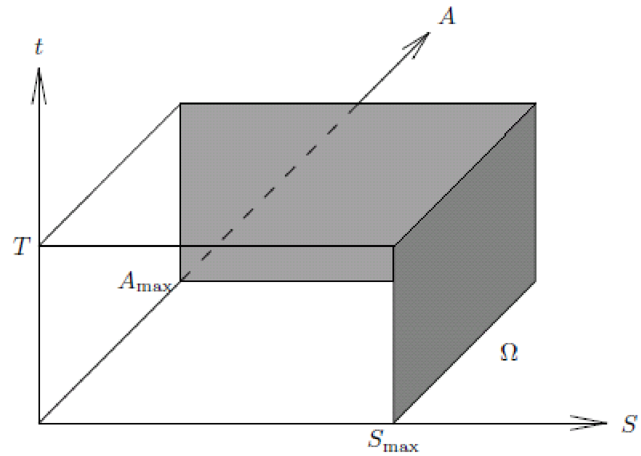
Przy obliczaniu ceny opcji azjatyckiej o funkcji wypłaty $(\frac{A}{T} - K)$, gdzie $A = \int_0^t S(u)du$, korzystamy z następującego równania różniczkowego:

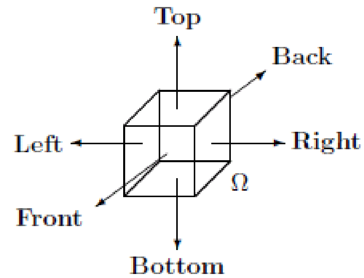
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + S\frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0$$

Równanie to jest dwuwymiarowe ze względu na parametry S i A. Metoda **ADI** (Alternating Direction Implicit), polega na rowiązaniu tego równania poprzez metodę implicit względem jednej zmiennej i metodę explicit względem drugiej zmiennej z chwili n do fikcyjnej chwili $n-\frac{1}{2}$. Następnie rozwiązujemy rówanie z chwili $n-\frac{1}{2}$ do chwili $n-1$ poprzez metodę implicit dla drugiej zmiennej i metodę explicit dla pierwszej zmiennej zmiennej.

Dla naszego rówanania różniczkowego będzie to wyglądało następująco. Z chwili n dla zmiennej A idziemy metodą explicit, a dla S metodą implicit, przy czym obliczając pochodną cząstkową względem A stosujemy *upwind*.

$$\frac{V_{ij}^{n-\frac{1}{2}} - V_{ij}^{n}}{\frac{1}{2}dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{V_{i+1j}^{n-\frac{1}{2}} - 2V_{ij}^{n-\frac{1}{2}} + V_{i-1j}^{n-\frac{1}{2}}}{(ds)^2} + rS\frac{V_{i+1j}^{n-\frac{1}{2}} - V_{i-1j}^{n-\frac{1}{2}}}{2ds} + S\frac{V_{ij+1}^{n} - V_{ij}^{n}}{da} - rV_{ij}^{n-\frac{1}{2}} = 0$$





Co można zapisać:

$$A_{ij}^{n-\frac{1}{2}}V_{i-1j}^{n-\frac{1}{2}}+B_{ij}^{n-\frac{1}{2}}V_{ij}^{n-\frac{1}{2}}+C_{ij}^{n-\frac{1}{2}}V_{i+1j}^{n-\frac{1}{2}}=(\frac{2}{dt}+\frac{ids}{da})dtV_{ij}^{n}-\frac{ids}{da}dtV_{ij+1}^{n}$$

gdzie da, dt, ds oznaczają wielkość kroku na siatce odpowiednio dla A, T i S, zaś współczynniki równają się:

$A_{ij}^{n-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\sigma^2 i^2-ri)dt$, $B_{ij}^{n-\frac{1}{2}}=(\frac{2}{dt}-r-\sigma^2 i^2)dt$, $C_{ij}^{n-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\sigma^2 i^2+ri)dt$

Następnie z chwili $n-\frac{1}{2}$ do $n-1$ idziemy metodą explicit dla zmiennej S i metodą implicit dla A.

$$\frac{V_{ij}^{n-1}-V_{ij}^{n-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}dt}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{V_{i+1j}^{n-\frac{1}{2}}-2V_{ij}^{n-\frac{1}{2}}+V_{i-1j}^{n-\frac{1}{2}}}{(ds)^2}+rS\frac{V_{i+1j}^{n-\frac{1}{2}}-V_{i-1j}^{n-\frac{1}{2}}}{2ds}+S\frac{V_{ij+1}^{n-1}-V_{ij}^{n-1}}{da}-rV_{ij}^{n-\frac{1}{2}}=0$$

Co można zapisać jako:

$$(-\frac{2}{dt}+\frac{ids}{da})dtV_{ij}^{n-1}-\frac{ids}{da}dtV_{ij+1}^{n-1}=A_{ij}^{n-\frac{1}{2}}V_{i-1j}^{n-\frac{1}{2}}+B_{ij}^{n-\frac{1}{2}}V_{ij}^{n-\frac{1}{2}}+C_{ij}^{n-\frac{1}{2}}V_{i+1j}^{n-\frac{1}{2}}$$

gdzie współczynniki równają się:

$A_{ij}^{n-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\sigma^2 i^2-ri)dt$, $B_{ij}^{n-\frac{1}{2}}=(-\frac{2}{dt}-r-\sigma^2 i^2)dt$, $C_{ij}^{n-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\sigma^2 i^2+ri)dt$

Poniższy rysunek prezentuje jak wyglada siatka. Jest on zaczerpnięty z pracy Jensa Huggera *Wellposedness of the boundary value formulation of a fixed strike Asian option.*

Warunki brzegowe dla powyższej siatki to dla odpowiednich ścian:

Top: $V(S,A,T)=max(\frac{A}{T}-K,0)$ dla $0\leqslant S\leqslant S_{max}, 0\leqslant A\leqslant A_{max}$

Left: $V(0,A,t)=e^{-r(T-t)}max(\frac{A}{T}-K,0)$ dla $0\leqslant t\leqslant T, 0\leqslant A\leqslant A_{max}$

Back: $V(0,A_{max},t)=e^{-r(T-t)}(\frac{A_{max}}{T}-K)+\frac{S}{rT}(1-e^{-r(T-t)})$ dla $0\leqslant S\leqslant S_{max}, 0\leqslant t\leqslant T$

Right: $V(S_{max},A,t)=max(e^{-r(T-t)}(\frac{A}{T}-K)+\frac{S_{max}}{rT}(1-e^{-r(T-t)}),0)$ dla $0\leqslant t\leqslant T, 0\leqslant A\leqslant A_{max}$

Interfejs funkcji wygląda następująco:

```
function price = AsianADI(S0,r,sigma,T,K,Smax,Amax, I,J,N)
# I - liczba przedziałów dla ceny,
# J - liczba przedziałów dla sredniej ceny,
# N - liczba przedziałów dla czasu
```

Oczywiście $A_{max} < S_{max}$, bo $S_0 < S_{max}$.