

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Anna Niewiarowska

Nr albumu: 201074

Trudność aproksymacji problemów NP-trudnych

Praca magisterska
na kierunku INFORMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra hab. Krzysztofa Diksa
Instytut Informatyki

Maj 2006

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W pracy przedstawione są zagadnienia związane z aproksymacją, czyli znajdowaniem przybliżonych rozwiązań dla problemów NP-trudnych. Jednym z największych osiągnięć w tej dziedzinie jest twierdzenie PCP, które pokazuje, że dla wielu problemów NP-trudnych znajdowanie odpowiednio dobrych przybliżonych rozwiązań również jest NP-trudne. W pracy znajduje się spójny dowód tego twierdzenia, przedstawiony w przystępny sposób. W dalszej części pracy opisane są przykładowe zastosowania twierdzenia PCP.

Słowa kluczowe

aproksymacja, twierdzenie PCP, NP-trudność, trudność aproksymacji, ekspandery

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.3 Informatyka

Klasyfikacja tematyczna

F. Theory of Computation

F.2 Analysis of algorithms and problem complexity

Tytuł pracy w języku angielskim

Hardness of approximation of NP-hard problems

Spis treści

1. Wstęp	5
1.1. Algorytmy aproksymacyjne	5
1.2. Trudność aproksymacji	6
2. Spełnialność formuł logicznych i spełnialność grafu więzów	9
2.1. Problem spełnialności formuł logicznych	9
2.1.1. Aproksymacja problemu MAX 3SAT	10
2.2. Problem spełnialności grafu więzów	10
2.2.1. Problem 3-kolorowania a graf więzów	10
2.2.2. Spełnialność grafu więzów	11
2.3. Redukcja problemu spełnialności grafu więzów do problemu 3SAT	11
3. Sformułowanie twierdzenia PCP i idea dowodu	13
3.1. Twierdzenie PCP	13
3.2. Zwiększanie luki aproksymacji	14
4. Ekspandery	15
4.1. Podstawowe własności	15
4.2. Przekształcanie grafów do postaci ekspanderów	16
4.2.1. Tworzenie grafu regularnego	17
4.2.2. Zwiększanie parametru ekspansywności	18
4.3. Błądzenie losowe po ekspanderach	19
5. Potęgowanie grafu	21
5.1. Operacja potęgowania	21
5.2. Potęgowanie grafu a luka aproksymacji	22
5.3. Rachunki	22
6. Zmniejszanie rozmiaru alfabetu	25
6.1. Operacja zmniejszania rozmiaru alfabetu	25
6.2. Dowód twierdzenia PCP	28
7. Przykłady zastosowań twierdzenia PCP	29
7.1. Problem GAP 3SAT z ograniczoną liczbą wystąpień zmiennych	29
7.2. Minimalne pokrycie wierzchołkowe i maksymalny zbiór niezależny	31
7.3. Problem LABELCOVER	32
Bibliografia	35

Rozdział 1

Wstęp

Dużo ważnych zagadnień algorytmicznych to problemy NP-trudne. Jak wiadomo, nie potrafimy znaleźć efektywnych algorytmów do rozwiązywania tych problemów. Ponadto, jeżeli hipoteza $P \neq NP$ jest prawdziwa, problemów tych nie można rozwiązać w czasie wielomianowym.

Już dla danych wejściowych niewielkich rozmiarów algorytmy rozwiązujące problemy NP-trudne działają bardzo wolno. Dla większych danych obliczenie rozwiązania jest praktycznie niemożliwe. W tej sytuacji możemy postępować na dwa sposoby: szukać algorytmów, które dla niektórych danych wejściowych działają w czasie wielomianowym, ale w pozostałych przypadkach działają wykładniczo, lub algorytmów aproksymacyjnych, które zawsze działają w czasie wielomianowym, ale zwracany przez nie wynik jest nieoptymalny. W tej pracy zajmiemy się właśnie algorytmami aproksymacyjnymi.

1.1. Algorytmy aproksymacyjne

Problem optymalizacyjny jest to problem obliczeniowy, który ma wiele rozwiązań, przy czym każdemu rozwiązaniu odpowiada pewna wartość (koszt). Rozwiązanie optymalne to takie, które maksymalizuje bądź minimalizuje koszt.

Problemy optymalizacyjne dzielimy na problemy maksymalizacji i problemy minimalizacji. Rozwiązanie optymalne dla danego egzemplarza problemu ϕ oznaczamy $OPT(\phi)$.

Algorytm aproksymacyjny jest to wielomianowy algorytm, który dla danego problemu optymalizacyjnego znajduje rozwiązanie, którego koszt nie różni się od kosztu rozwiązania optymalnego więcej razy, niż pewien ustalony współczynnik.

Definicja 1.1 *Algorytm aproksymacyjny ma współczynnik aproksymacji równy α , jeśli:*

- dla problemu maksymalizacji: dla dowolnego egzemplarza problemu ϕ koszt otrzymanego rozwiązania wynosi co najmniej $\alpha \cdot OPT(\phi)$,
- dla problemu minimalizacji: dla dowolnego egzemplarza problemu ϕ koszt otrzymanego rozwiązania wynosi co najwyżej $\alpha \cdot OPT(\phi)$.

Z powyższej definicji można wywnioskować, że dla problemów maksymalizacji współczynnik aproksymacji $\alpha < 1$, natomiast dla problemów minimalizacji $\alpha > 1$.

Poniżej znajduje się opis prostego algorytmu aproksymacyjnego.

Definicja 1.2 Problem komiwojażera: dla danego grafu pełnego $G = (V, E)$, w którym każdej krawędzi przypisana jest nieujemna wartość (koszt), należy znaleźć cykl o najmniejszej sumie kosztów krawędzi przechodzący przez każdy wierzchołek dokładnie raz.

W metrycznej wersji problemu komiwojażera rozpatrujemy wyłącznie grafy, dla których funkcja kosztu spełnia nierówność trójkąta.

Algorytm aproksymacyjny dla problemu metrycznego wygląda następująco:

- Znajdujemy minimalne drzewo rozpinające T grafu G ,
- obchodzimy otrzymane drzewo przy użyciu algorytmu DFS i numerujemy odwiedzane wierzchołki w kolejności preorder,
- zwracamy cykl, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki w kolejności naszego numerowania.

Pokażemy teraz, że przedstawiony algorytm ma współczynnik aproksymacji równy 2. Dla zbioru krawędzi W sumę kosztów krawędzi z tego zbioru będziemy oznaczać $c(W)$.

Niech C będzie optymalnym cyklem przechodzącym przez wszystkie wierzchołki dokładnie jeden raz. Przez usunięcie dowolnej krawędzi tego cyklu otrzymujemy drzewo rozpinające. Zatem $c(C) \geq c(T)$, gdzie T jest minimalnym drzewem rozpinającym naszego grafu.

Koszt obchodzenia drzewa T algorytmem DFS wynosi $2 \cdot c(T)$ (każdą krawędzią drzewa idziemy dwa razy). Oznaczmy przez C' cykl, który jest tworzony przez algorytm aproksymacyjny. Cykl ten powstaje z obchodzenia drzewa T algorytmem DFS przez usunięcie powtarzających się wierzchołków. Ponieważ zachodzi nierówność trójkąta, usuwanie wierzchołków na ścieżce nie może zwiększyć kosztu. Zatem $c(C') \leq 2 \cdot c(T) \leq 2 \cdot c(C)$.

Koszt znalezionej cyklu jest co najwyżej dwukrotnie większy niż koszt optymalnego cyklu, więc przedstawiony algorytm ma współczynnik aproksymacji równy 2.

1.2. Trudność aproksymacji

Problemy NP-trudne mają bardzo różnorodną strukturę, więc mogą zachowywać się różnie z punktu widzenia aproksymacji. Niektóre z nich możemy aproksymować z dowolną dokładnością (mówimy wtedy, że dla takich problemów istnieje wielomianowy schemat aproksymacji). Inne problemy potrafimy aproksymować z pewnym stałym współczynnikiem, lub współczynnikiem rzędu $O(\log n)$. Ale istnieją też takie problemy, których nie potrafimy aproksymować z żadnym współczynnikiem, lub współczynnik aproksymacji jest tak duży, że algorytm jest w praktyce bezużyteczny. Co więcej, dla wielu problemów potrafimy dowieść, że jeżeli $P \neq NP$, to problemów tych nie da się aproksymować z określonym współczynnikiem.

W jaki sposób można dowodzić trudność aproksymacji? Wykonuje się to za pomocą redukcji, podobnie jak w przypadku dowodów NP-trudności problemów decyzyjnych. Możemy wykonywać redukcje z problemów NP-trudnych (taką redukcję określa się wtedy jako redukcję wprowadzającą lukę) lub z problemów, których trudność aproksymacji umiemy już udowodnić (mówimy wtedy o redukcji zachowującej lukę).

Przedstawimy teraz jeden z najbardziej znanych dowodów trudności aproksymacji:

Twierdzenie 1.1 Aproksymacja problemu komiwojażera (bez założenia, że zachodzi nierówność trójkąta) z dowolnym współczynnikiem $\alpha > 1$ jest NP-trudna.

Dowód: Wykonamy redukcję z problemu cyklu Hamiltona. Pokażemy, że gdybyśmy potrafili aproksymować problem komiwojażera z pewnym współczynnikiem $\alpha > 1$, to moglibyśmy rozwiązać w czasie wielomianowym problem cyklu Hamiltona.

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, dla którego chcemy rozstrzygnąć, czy zawiera on cykl Hamiltona. Przekształcamy graf G w graf G' w następujący sposób:

- G' ma taki sam zbiór wierzchołków co G ,
- G' jest grafem pełnym,
- na krawędziach grafu G' określamy następującą funkcję kosztu: jeśli $(u, v) \in E$, to $c(u, v) = 1$, w przeciwnym razie $c(u, v) = 2 \cdot \alpha \cdot |V|$.

Założmy teraz, że mamy algorytm aproksymacyjny o współczynniku α dla problemu komiwojażera. Wykonujemy ten algorytm dla grafu G' . Jeśli w grafie G istnieje cykl Hamiltona, to otrzymamy wynik równy co najwyżej $\alpha \cdot OPT(G) = \alpha \cdot |V|$. Jeśli cykl Hamiltona nie istnieje, to w znalezionym cyklu musi się znajdować co najmniej jedna krawędź o koszcie $2 \cdot \alpha \cdot |V|$, więc koszt znalezionego rozwiązania będzie wyższy niż w poprzednim wypadku. Zatem możemy rozstrzygnąć, czy graf G ma cykl Hamiltona.

Pokazaliśmy więc, że aproksymacja problemu komiwojażera z dowolnym współczynnikiem $\alpha > 1$ jest NP-trudna. ■

Jeżeli aproksymacja danego problemu ze współczynnikiem α jest NP-trudna, to mówimy, że α jest *luką aproksymacji* danego problemu.

W tym rozdziale pokazaliśmy, że do algorytmów aproksymacyjnych możemy podejść na dwa sposoby: szukać algorytmów o coraz lepszych (czyli coraz bliższych 1) współczynnikach aproksymacji lub próbować udowodnić, że aproksymacja danego problemu z odpowiednim współczynnikiem jest NP-trudna. W tej pracy zajmiemy się dowodzeniem trudności aproksymacji.

Rozdział 2

Spełnialność formuł logicznych i spełnialność grafu więzów

W pierwszej części tego rozdziału zajmiemy się jednym z najbardziej klasycznych problemów NP-trudnych, czyli problemem spełnialności formuł logicznych w logice klasycznej zapisanych w postaci 3CNF.

Formuła logiczna w postaci 3CNF ma postać koniunkcji dowolnej liczby klauzul, gdzie każda klauzula jest alternatywą co najwyżej trzech zmiennych lub negacji zmiennych.

Przykład formuły 3CNF: $(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_4) \wedge (x_4 \vee x_2 \vee \neg x_3)$

W dalszej części rozdziału zdefiniujemy graf więzów oraz przedstawimy problem spełnialności takiego grafu.

2.1. Problem spełnialności formuł logicznych

Definicja 2.1 Problem 3SAT: *Dla danej formuły ϕ w postaci 3CNF stwierdzić, czy jest ona spełnialna.*

Można sformułować ten problem w postaci optymalizacyjnej:

Definicja 2.2 Problem MAX 3SAT: *Dla danej formuły ϕ w postaci 3CNF znaleźć wartościowanie spełniające maksymalną liczbę klauzul.*

Będziemy stosować następujące oznaczenia:

- $UNSAT_\sigma(\phi)$ — liczba z przedziału $[0, 1]$ oznaczająca, jaki procent klauzul formuły ϕ nie jest spełniony przy wartościowaniu σ
- $UNSAT(\phi) = \min_\sigma UNSAT_\sigma(\phi)$

Problem spełnialności formuł logicznych w postaci 3CNF możemy sformułować jeszcze w inny sposób:

Definicja 2.3 Problem GAP 3SAT: *Dla danej formuły logicznej ϕ w postaci 3CNF i liczby $\alpha > 0$ rozróżnić przypadki, dla których $UNSAT(\phi) = 0$ lub $UNSAT(\phi) \geq \alpha$.*

W przypadku, gdy $UNSAT(\phi) \in (0, \alpha)$, algorytm rozwiązujący problem GAP 3SAT może dawać dowolną odpowiedź.

2.1.1. Aproksymacja problemu MAX 3SAT

Niech ϕ będzie formułą w postaci 3CNF. Pokażemy, w jaki sposób można znaleźć wartościowanie, w którym będzie spełnionych co najmniej $\frac{1}{2} \cdot OPT(\phi)$ klauzul. Rozważmy dwa wartościowania: jedno nadaje wszystkim zmiennym wartość *TRUE*, a drugie wartość *FALSE*. Zwracamy to wartościowanie, dla którego spełniona jest większa liczba klauzul.

Łatwo zauważyć, że jest to algorytm $\frac{1}{2}$ -aproksymacyjny dla problemu MAX 3SAT. Każda klauzula jest spełniona dla co najmniej jednego z naszych wartościowań. Zatem w którymś z nich musi być spełniona co najmniej połowa wszystkich klauzul, co daje aproksymację o współczynniku $\frac{1}{2}$.

W książce [5] znajduje się opis algorytmu aproksymującego powyższy problem ze współczynnikiem $\frac{3}{4}$.

Powstaje pytanie, jak dobre algorytmy aproksymacyjne dla problemu MAX 3SAT możemy tworzyć. Czy współczynnik aproksymacji może być dowolnie bliski 1? Okazuje się, że jest to niemożliwe, o czym przekonamy się w dalszej części pracy.

2.2. Problem spełnialności grafu więzów

Załóżmy, że mamy zbiór zmiennych V nad pewnym skończonym alfabetem Σ . Ponadto mamy zbiór więzów, z których każdy dotyczy (co najwyżej) dwóch zmiennych i określa zależności między wartościami tych zmiennych. Strukturę taką możemy przedstawić w postaci grafu, w którym wierzchołkami są zmienne, natomiast krawędzie oznaczają więzy między poszczególnymi parami zmiennych (pętle oznaczają więzy dotyczące jednej zmiennej, o ile takie występują).

Definicja 2.4 *Grafem więzów nazywamy graf $G = ((V, E), \Sigma, \mathcal{C})$, gdzie:*

- (V, E) jest grafem nieskierowanym,
- V jest równocześnie zbiorem zmiennych przyjmujących wartości z alfabetu Σ ,
- dla każdej krawędzi $e \in E$ określony jest więz $c(e) \subseteq \Sigma^2$ oraz $\mathcal{C} = \{c(e)\}_{e \in E}$.

Rozmiar grafu więzów G oznaczamy $rozmiar(G)$ i definiujemy następująco: $rozmiar(G) = \Theta(|V| + |E| \cdot |\Sigma|^2)$.

2.2.1. Problem 3-kolorowania a graf więzów

Chcemy stwierdzić, czy dany graf $G = (V, E)$ jest 3-kolorowalny. Graf ten możemy przedstawić w postaci grafu więzów G' w następujący sposób: struktura grafu pozostaje bez zmian, alfabet jest zbiorem trzech dopuszczalnych kolorów, natomiast więzy wymuszają, aby wartości na obu końcach krawędzi były różne.

Wtedy problem 3-kolorowania grafu G jest równoważny problemowi spełnialności grafu więzów G' .

2.2.2. Spełnialność grafu więzów

Niech $G = ((V, E), \Sigma, \mathcal{C})$ będzie grafem więzów, a $\sigma: V \rightarrow \Sigma$ dowolnym wartościowaniem. Wiąz $c(e) \in \mathcal{C}$ nazywamy spełnionym przez wartościowanie σ , jeśli nadaje ono końcom krawędzi e wartości (a, b) , gdzie $(a, b) \in c(e)$.

Podobnie jak dla problemu spełnialności formuł logicznych, $UNSAT_\sigma(G)$ jest liczbą z przedziału $[0, 1]$, oznaczającą procent więzów, które nie są spełnione przez wartościowanie σ .

Problem spełnialności grafu więzów możemy sformułować w postaci decyzyjnej lub optymalizacyjnej. My będziemy zajmować się tą drugą:

Definicja 2.5 Problem spełnialności grafu więzów: *Dla danego grafu więzów G obliczyć maksymalną liczbę więzów, jakie mogą zostać spełnione.*

Problem ten należy do problemów NP-trudnych (W poprzednim podrozdziale pokazaliśmy redukcję z problemu 3-kolorowania).

2.3. Redukcja problemu spełnialności grafu więzów do problemu 3SAT

Pokażemy teraz, w jaki sposób na podstawie grafu więzów $G = ((V, E), \Sigma, \mathcal{C})$ możemy utworzyć formułę logiczną ϕ w postaci 3CNF tak, aby spełniony był warunek: $UNSAT(\phi) \in [\frac{UNSAT(G)}{C_\Sigma}, UNSAT(G)]$, gdzie C_Σ jest stałą zależną tylko od $|\Sigma|$.

Niech $G = ((V, E), \Sigma, \mathcal{C})$ będzie grafem więzów. Zbudujemy formułę ϕ w taki sposób, że każdemu wiązowi w G będzie odpowiadać dokładnie C_Σ klauzul formuły.

Każda zmienna $v_i \in V$ jest nad skończonym alfabetem Σ , więc możemy ją zastąpić stałą liczbą zmiennych logicznych $v_{i,1}, \dots, v_{i,k}$ tak, żeby każdemu wartościowaniu σ zmiennej v_i odpowiadało jakieś wartościowanie σ' zmiennych $v_{i,j}$ i odwrotnie. Chcemy skonstruować formułę ϕ odpowiadającą wiązowi między zmiennymi v_i i v_j . W formule tej będą występować zmienne $v_{i,1}, \dots, v_{i,k}, v_{j,1}, \dots, v_{j,k}$. Możemy zbudować tabelkę (stałego rozmiaru) określającą, przy jakich wartościowaniach tych zmiennych dany wiąz będzie spełniony, a przy jakich nie. Na podstawie takiej tabelki możemy łatwo zbudować formułę $\neg\phi$. Będzie ona postaci: $(x_{1,1} \wedge \dots \wedge x_{1,k} \wedge y_{1,1} \wedge \dots \wedge y_{1,k}) \vee \dots \vee (x_{m,1} \wedge \dots \wedge x_{m,k} \wedge y_{m,1} \wedge \dots \wedge y_{m,k})$, gdzie $x_{a,b}$ może być postaci $v_{i,b}$ lub $\neg v_{i,b}$, natomiast $y_{a,b} = v_{j,b}$ lub $\neg v_{j,b}$.

Za pomocą praw de Morgana z powyższej formuły otrzymamy formułę ϕ : $(\neg x_{1,1} \vee \dots \vee \neg x_{1,k} \vee \neg y_{1,1} \vee \dots \vee \neg y_{1,k}) \wedge \dots \wedge (\neg x_{m,1} \vee \dots \vee \neg x_{m,k} \vee \neg y_{m,1} \vee \dots \vee \neg y_{m,k})$. Musimy jeszcze doprowadzić tę formułę do postaci 3CNF, czyli dodając dodatkowe zmienne rozbić wszystkie klauzule tak, aby każda z nich składała się co najwyżej z trzech zmiennych lub negacji zmiennych.

W ten sposób z każdego wiązu powstanie co najwyżej C_Σ klauzul. Żeby każdemu wiązowi odpowiadało dokładnie C_Σ klauzul, możemy dodać dodatkowe spełnialne klauzule.

Zauważmy teraz, że dany wiąz jest spełniony przez wartościowanie σ wtedy i tylko wtedy, kiedy formuła utworzona na podstawie tego wiązu jest spełniona przy wartościowaniu σ' . Ponadto, jeśli dany wiąz nie jest spełniony przy wartościowaniu σ , to w formule ϕ może nie być spełnionych od 1 do C_Σ klauzul odpowiadających temu wiązowi. Zatem otrzymujemy: $UNSAT(\phi) \in [\frac{UNSAT(G)}{C_\Sigma}, UNSAT(G)]$.

Twierdzenie 2.1 *Jeśli potrafimy rozwiązać w czasie wielomianowym problem GAP 3SAT z pewnym współczynnikiem α , to dla problemu spełnialności grafu więzów potrafimy w czasie wielomianowym rozróżnić przypadki $UNSAT(G) = 0$ i $UNSAT(G) \geq \alpha \cdot C_\Sigma$.*

Dowód: Z grafu G możemy utworzyć formułę 3CNF ϕ w sposób opisany powyżej. Wszystkie wykonywane operacje odbywały się w czasie wielomianowym względem rozmiaru grafu G , otrzymana formuła też jest rozmiaru wielomianowego względem rozmiaru G . Jeśli $UNSAT(G) = 0$, to również $UNSAT(\phi) = 0$. Jeśli natomiast $UNSAT(G) \geq \alpha \cdot C_\Sigma$, to $UNSAT(\phi) \geq \alpha$. Rozwiązując problem GAP 3SAT dla otrzymanej formuły, otrzymamy rozwiązanie naszego problemu. ■

Rozdział 3

Sformułowanie twierdzenia PCP i idea dowodu

Początkowo w sformułowaniu twierdzenia PCP była mowa o maszynach Turinga oraz o probabilistycznej weryfikacji świadków dla problemów NP-trudnych (stąd wzięła się też nazwa twierdzenia — Probabilistically Checkable Proofs).

Korzystając z tego twierdzenia, udowodniono trudność aproksymacji wielu problemów NP-trudnych. Okazuje się, że niektóre z tych wyników są równoważne twierdzeniu PCP.

3.1. Twierdzenie PCP

W tej pracy będziemy się zajmować twierdzeniem PCP w następującej wersji:

Twierdzenie 3.1 [Twierdzenie PCP] *Istnieje stała $\alpha > 0$ taka, że problem GAP 3SAT ze współczynnikiem α jest NP-trudny.*

Idea dowodu: Pokażemy, że istnieje stała $\alpha' > 0$ taka, że dla problemu spełnialności grafu więzów rozróżnienie przypadków $UNSAT(G) = 0$ i $UNSAT(G) \geq \alpha'$ jest NP-trudne. Wtedy z twierdzenia 2.1 otrzymamy tezę.

Niech $G = ((V, E), \Sigma, \mathcal{C})$ będzie grafem więzów. Wtedy zachodzi jeden z warunków: $UNSAT(G) = 0$ lub $UNSAT(G) \geq 1/|E|$. Zatem $1/|E|$ jest luką aproksymacji dla problemu spełnialności grafu więzów. Zastanówmy się teraz, jak ze współczynnika $1/|E|$ otrzymać stały współczynnik.

Będziemy wykonywać operację, która dla grafu więzów G w czasie wielomianowym tworzy graf więzów G' taki, że:

- jeśli $UNSAT(G) = 0$, to również $UNSAT(G') = 0$,
- jeśli $UNSAT(G) > 0$, to $UNSAT(G') \geq \min(\alpha, 2 \cdot UNSAT(G))$ dla pewnego $\alpha > 0$,
- rozmiar grafu G' jest liniowy względem rozmiaru grafu G .

Taka operacja podwaja lukę aproksymacji, o ile luka ta jest nie większa od pewnej stałej, niezależnej od G .

Aby wykazać, że aproksymacja problemu spełnialności grafu więzów z pewnym stałym współczynnikiem jest NP-trudna, wykonamy najpierw redukcję z problemu 3-kolorowania grafu. Niech G — dowolny graf, dla którego chcemy rozstrzygnąć, czy jest 3-kolorowalny.

Graf G przekształcimy do grafu więzów G' tak, jak to zostało przedstawione w rozdziale 2.2.1. Jeśli graf G jest 3-kolorowalny, to $UNSAT(G') = 0$, w przeciwnym wypadku $UNSAT(G') \geq 1/|E|$. Teraz zastosujemy $O(\log n)$ razy operację podwajania luki aproksymacji. Z grafu G' otrzymamy graf G'' (rozmiaru wielomianowego względem G'), przy czym jeżeli $UNSAT(G') = 0$, to $UNSAT(G'') = 0$, a w przeciwnym razie $UNSAT(G'') \geq \alpha$ dla pewnej stałej $\alpha > 0$.

Załóżmy, że dla problemu spełnialności grafu więzów potrafimy w czasie wielomianowym rozróżnić przypadki $UNSAT(G'') = 0$ i $UNSAT(G'') \geq \alpha$. Wtedy potrafimy w czasie wielomianowym rozstrzygnąć, czy graf G jest 3-kolorowalny. Zatem rozróżnienie tych dwóch przypadków jest NP-trudne.

3.2. Zwiększanie luki aproksymacji

Główna część dowodu twierdzenia PCP polega na konstrukcji operacji podwajania luki aproksymacji. Taka operacja będzie składać się z trzech etapów:

- przetwarzanie wstępne — z grafu więzów G tworzymy graf G' , który ma strukturę ekspandera o pewnych szczególnych własnościach. Graf G' ma rozmiar liniowy względem rozmiaru grafu G , ten sam zbiór wierzchołków i zbliżoną lukę aproksymacji.
- potęgowanie grafu — z grafu więzów G' tworzymy graf $(G')^t$ dla pewnego $t \in \mathbb{N}$. Dzięki temu, że graf G ma odpowiednią strukturę, operacja potęgowania zwiększy lukę aproksymacji, przy liniowym zwiększeniu rozmiaru alfabetu i rozmiaru grafu.
- zmniejszenie rozmiaru alfabetu — z grafu $(G')^t$ otrzymamy graf G'' , który ma pewien ustalony alfabet Σ_0 (niezależny od G) i lukę aproksymacji zbliżoną jak w grafie $(G')^t$.

Możemy tak dobrać wszystkie parametry, aby po wykonaniu powyższych kroków luka aproksymacji grafu G'' była co najmniej dwukrotnie większa niż luka aproksymacji grafu G . (Oczywiście pod warunkiem, że nie przekroczy ona pewnego ograniczenia $\alpha > 0$.)

W kolejnych rozdziałach pracy znajduje się opis powyższych operacji.

Rozdział 4

Ekspandery

W tym rozdziale zajmiemy się ekspanderami. Jest to szczególny rodzaj grafów regularnych, w których dla dowolnego podzbioru wierzchołków istnieje odpowiednio dużo krawędzi łączących ten zbiór z jego dopełnieniem. O jakości ekspandera świadczy współczynnik zwany parametrem ekspansywności — im większy ten parametr, tym „lepszy” jest ekspander.

Ekspandery mają zastosowanie w wielu dziedzinach informatyki, na przykład przy projektowaniu sieci, kodów korygujących błędy lub przy derandomizacji.

W tym rozdziale przedstawimy podstawowe własności ekspanderów i pokażemy, w jaki sposób mogą się one przydać do dowodzenia trudności aproksymacji.

4.1. Podstawowe własności

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem oraz $S, T \subseteq V$. Przez $E(S, T)$ będziemy oznaczać liczbę krawędzi, które mają jeden koniec w zbiorze S , a drugi w T . Przez \bar{S} będziemy oznaczać dopełnienie zbioru S .

Definicja 4.1 Ekspanderem o parametrze ekspansywności $h(G)$ nazywamy regularny graf nieskierowany $G = (V, E)$, dla którego zachodzi:

$$h(G) = \min_{S \subseteq V} \frac{E(S, \bar{S})}{\min(|S|, |\bar{S}|)}$$

Graf ten może mieć krawędzie wielokrotne i pętle.

Obliczanie parametru ekspansywności dla danego grafu jest bardzo nieefektywne. Okazuje się jednak, że parametr ten jest ściśle związany ze spektrum grafu, a konkretnie z drugą wartością własną macierzy sąsiedztwa.

Niech $G = (V, E)$ będzie ekspanderem o stopniu wierzchołków d . Macierz sąsiedztwa A dla tego grafu jest macierzą o wymiarach $|V| \times |V|$. G jest grafem nieskierowanym, więc macierz A jest symetryczna. Z algebry liniowej wiemy, że taka macierz ma $|V|$ rzeczywistych wartości własnych $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{|V|}$. Wartości te nazywamy *spektrum* grafu G . Zawiera ono dużo informacji na temat grafu, np. dla grafów d -regularnych zachodzi $\lambda_1 = d$.

Dla ekspandera G o stopniu wierzchołków d zachodzą następujące zależności między parametrem ekspansywności $h(G)$ i drugą wartością własną λ_2 :

Twierdzenie 4.1 $\frac{d-\lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d-\lambda_2)}$

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w pracy [4].

Zanim zajmiemy się omawianiem zastosowań ekspanderów, powinniśmy wiedzieć, czy takie grafy można efektywnie konstruować. Zwykle będziemy chcieli otrzymać ekspandery o różnej liczbie wierzchołków i odpowiednio dużym parametrze ekspansywności. Oczywiście im większy jest stopień wierzchołków, tym większy może być parametr ekspansywności. Na przykład gdy graf G jest $2n$ -wierzchołkową kliką, $h(G) = n$. Chcemy jednak, żeby stopień wierzchołków był stały, niezależnie od liczby wierzchołków.

Definicja 4.2 Rodziną ekspanderów o parametrze ekspansywności $h > 0$ nazywamy nieskończoną rodzinę grafów $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \in I}$, gdzie:

- każdy graf G_i jest d -regularnym ekspanderem (d jest stałe dla całej rodziny \mathcal{G}) o parametrze ekspansywności równym co najmniej h ,
- kolejne grafy mają coraz większą liczbę wierzchołków, ale liczba ta nie rośnie zbyt szybko (np. $n_{i+1} \leq 2 \cdot n_i$, gdzie n_i oznacza liczbę wierzchołków i -tego grafu).

Pierwszym narzucającym się pytaniem jest, czy takie rodziny ekspanderów istnieją. Czy dla grafów G_i o coraz większej liczbie wierzchołków i stałym stopniu wierzchołków d nie musi zachodzić $h(G_i) \rightarrow 0$? Okazuje się, że tak nie jest. Istnienie takich rodzin grafów można pokazać probabilistycznie lub przedstawiając sposób ich konstrukcji.

Twierdzenie 4.2 Istnieją stałe $d_0 \in \mathbb{N}$ i $h_0 > 0$ takie, że istnieje rodzina d_0 -regularnych ekspanderów $\mathcal{G} = \{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o parametrze ekspansywności h_0 . Co więcej, każdy graf z takiej rodziny można skonstruować w czasie wielomianowym względem jego rozmiaru.

Istnieją różne sposoby konstrukcji takich rodzin grafów. Można je znaleźć na przykład w pracy [4].

4.2. Przekształcanie grafów do postaci ekspanderów

W dowodzie twierdzenia PCP, aby wykonać operację powiększenia luki aproksymacji, musimy najpierw przekształcić graf więzów do postaci ekspandera o pewnych własnościach. W tym rozdziale pokażemy, w jaki sposób można to zrobić.

Twierdzenie 4.3 Dla dowolnego grafu więzów $G = ((V, E), \Sigma, \mathcal{C})$ można w czasie wielomianowym skonstruować graf więzów G' tak, aby zachodziły następujące warunki:

- G' jest d -regularnym ekspanderem o parametrze ekspansywności h ,
- każdy wierzchołek w grafie G' ma pętlę,
- graf G' ma taki sam alfabet co graf G ,
- $\text{rozmiar}(G') \leq C \cdot \text{rozmiar}(G)$,
- $\text{UNSAT}(G') \in [\beta \cdot \text{UNSAT}(G), \text{UNSAT}(G)]$,

gdzie $C, d, h > 0$ i $0 < \beta < 1$ są stałymi, niezależnymi od grafu G .

Konstrukcja takiego grafu składa się z dwóch etapów. Najpierw z grafu G tworzymy graf regularny, a potem dodajemy do niego krawędzie tak, aby każdy wierzchołek miał pętlę oraz aby parametr ekspansywności otrzymanego grafu był odpowiednio duży. W każdym z tych kroków musimy zadbać o to, aby nowy graf G' miał odpowiedni rozmiar i wartość $\text{UNSAT}(G')$.

4.2.1. Tworzenie grafu regularnego

Twierdzenie 4.4 *Istnieją stałe $d > 0$ oraz $0 < \beta_1 < 1$ takie, że każdy graf więzów $G = ((V, E), \Sigma, \mathcal{C})$ może być przekształcony do grafu $G' = ((V', E'), \Sigma, \mathcal{C}')$, gdzie G' jest grafem d -regularnym o $2 \cdot |E|$ wierzchołkach oraz $UNSAT(G') \in [\beta_1 \cdot UNSAT(G), UNSAT(G)]$.*

Dowód: Niech d_0, h_0 będą stałymi z twierdzenia 4.2. Wierzchołkami grafu G' będą kopie wierzchołków grafu G , przy czym dla każdego wierzchołka $v \in V$ tworzymy tyle kopii $v_i \in V'$, ile wynosi stopień v . Dla każdej krawędzi $(u, v) \in E$ tworzymy w grafie G' krawędź pomiędzy jedną kopią wierzchołka u i jedną kopią wierzchołka v . Robimy to w taki sposób, aby z każdego wierzchołka grafu G' wychodziła dokładnie jedna krawędź. Teraz dla każdego wierzchołka $v \in V$ w grafie G' łączymy wszystkie jego kopie ekspanderem o stopniu wierzchołków d_0 i parametrze ekspansywności h_0 .

W wyniku tej operacji otrzymamy graf $(d_0 + 1)$ -regularny. Alfabet w nowym grafie jest taki sam jak w G . Więzy tworzymy w następujący sposób:

- jeśli dana krawędź odpowiada pewnej krawędzi (u, v) z grafu G , to dajemy jej takie same więzy, co krawędzi (u, v)
- w przeciwnym razie (gdy krawędź łączy kopie tego samego wierzchołka) tworzymy więzy wymuszające przypisanie obu wierzchołkom tej samej wartości

Utworzony w ten sposób graf G' ma $2 \cdot |E|$ wierzchołków i $|E| \cdot (d_0 + 1)$ krawędzi.

Musimy teraz sprawdzić, jaka jest wartość $UNSAT(G')$. Pokażemy, że zachodzą nierówności:

- $UNSAT(G') \leq UNSAT(G)$
- $UNSAT(G') \geq \beta_1 \cdot UNSAT(G)$, gdzie β_1 jest stałą niezależną od G

Pierwszą nierówność możemy łatwo uzasadnić. Niech σ będzie optymalnym wartościowaniem dla grafu G . Na podstawie σ możemy wygenerować wartościowanie σ' dla grafu G' . Każdy wierzchołek w grafie G' jest kopią pewnego wierzchołka v z grafu G , więc możemy mu przypisać wartość $\sigma(v)$. Przy takim wartościowaniu wszystkie kopie jednego wierzchołka mają tę samą wartość, więc wszystkie więzy na łączących je krawędziach są spełnione. Z pozostałych więzów jest dokładnie $UNSAT_\sigma(G) \cdot |E|$ niespełnionych (są to te same więzy, które nie zostały spełnione dla grafu G), czyli

$$UNSAT(G') \leq UNSAT_{\sigma'}(G') = \frac{UNSAT_\sigma(G) \cdot |E|}{|E| \cdot (d_0 + 1)} \leq UNSAT_\sigma(G) = UNSAT(G).$$

Musimy jeszcze wykazać, że zachodzi druga nierówność. Niech σ' będzie optymalnym wartościowaniem dla G' . Na podstawie tego wartościowania wygenerujemy wartościowanie σ dla grafu G : Dla każdego wierzchołka v grafu G sprawdzamy, jakie wartości mają wszystkie kopie v w grafie G' . Jako $\sigma(v)$ bierzemy tę wartość, która wystąpiła najwięcej razy.

Co daje nam takie wartościowanie? Niech $v_i \in V'$ będą kopiami wierzchołka $v \in V$. Niech F będzie zbiorem tych v_i , dla których zachodzi $\sigma'(v_i) \neq \sigma(v)$. Pokażemy, że wtedy co najmniej $\frac{h_0 \cdot |F|}{2}$ więzów na krawędziach łączących wierzchołki v_i nie będzie spełnionych. Zbiór F jest sumą zbiorów $F_a = \{v_i \in F : \sigma(v_i) = a\}$, przy czym $\forall a \in \Sigma |F_a| \leq \frac{|F|}{2}$. Wierzchołki v_i są połączone ekspanderem o parametrze ekspansywności h_0 , więc $E(F_a, \{v_i\} \setminus F_a) \geq h_0 \cdot |F_a|$, zatem $\sum_{a \in \Sigma} E(F_a, \{v_i\} \setminus F_a) \geq |F| \cdot h_0$. Każda krawędź występuje w takiej sumie co najwyżej

dwa razy, więc co najmniej $\frac{h_0 \cdot |E|}{2}$ krawędzi łączy wierzchołki v_i , które mają przypisane różne wartości. Więzy dla tych krawędzi nie są spełnione.

Niech $H \subseteq E$ będzie zbiorem krawędzi grafu G , których więzy nie są spełnione przy wartościowaniu σ . Każdej krawędzi $e = (u, v) \in H$ odpowiada krawędź $e' = (u', v')$ w grafie G' . Zbiór H dzielimy na dwa podzbiory H_1 i H_2 w następujący sposób: jeśli więzy dla krawędzi e' są spełnione, to $e \in H_1$, w przeciwnym razie $e \in H_2$. Zatem w grafie G' nie są spełnione więzy dla co najmniej $|H_2|$ krawędzi łączących kopie różnych wierzchołków. Zauważmy teraz, że jeśli $e \in H_1$, to dla co najmniej jednego z końców tej krawędzi u zachodzi $\sigma(u) \neq \sigma'(u')$. Zatem w grafie G' dla co najmniej $|H_1|$ wierzchołków v' zachodzi $\sigma'(v') \neq \sigma(v)$, gdzie $v \in V$ jest wierzchołkiem odpowiadającym v' . Otrzymujemy więc, że więzy dla co najmniej $\frac{h_0 \cdot |H_1|}{2}$ krawędzi łączących kopie takich samych wierzchołków nie są spełnione.

W grafie G' przy optymalnym wartościowaniu pozostaje co najmniej $\frac{h_0 \cdot |H_1|}{2} + |H_2|$ niespełnionych więzów. Zachodzi więc:

$$UNSAT(G') \geq \frac{h_0 \cdot |H_1| + 2 \cdot |H_2|}{2 \cdot (d_0 + 1) \cdot |E|} \geq \frac{\min(2, h_0) \cdot |H|}{2 \cdot (d_0 + 1) \cdot |E|} \geq \frac{\min(2, h_0)}{2 \cdot (d_0 + 1)} \cdot UNSAT(G).$$

Zatem powyższe twierdzenie jest prawdziwe ze stałą $\beta_1 = \frac{\min(2, h_0)}{2 \cdot (d_0 + 1)}$ oraz $d = d_0 + 1$. ■

4.2.2. Zwiększanie parametru ekspansywności

Twierdzenie 4.5 *Istnieją stałe $d_0, h_0 > 0$ oraz $0 < \beta_2 < 1$ takie, że dowolny d -regularny graf więzów $G = ((V, E), \Sigma, \mathcal{C})$ można przekształcić do postaci $(d + d_0 + 1)$ -regularnego ekspandera $G' = ((V, E'), \Sigma, \mathcal{C}')$ o parametrze ekspansywności co najmniej h_0 , w którym każdy wierzchołek ma pętlę oraz zachodzi: $UNSAT(G') \in [\beta_2 \cdot UNSAT(G), UNSAT(G)]$.*

Dowód: Niech d_0, h_0 będą stałymi z twierdzenia 4.2. Graf G' tworzymy z G , dodając następujące krawędzie:

- do każdego wierzchołka dodajemy pętlę (uznajemy, że pętla dodaje 1 do stopnia wierzchołka)
- dodajemy krawędzie d_0 -regularnego ekspandera o $|V|$ wierzchołkach i parametrze ekspansywności h_0 (każdy wierzchołek naszego grafu utożsamiamy z jakimś wierzchołkiem ekspandera i dodajemy odpowiednie krawędzie)

Dla nowych krawędzi dodajemy więzy, które są zawsze spełnione.

Pokażemy, że utworzony w ten sposób graf G' spełnia wszystkie warunki twierdzenia. Ze sposobu konstrukcji grafu wynika, że jest on $(d + d_0 + 1)$ -regularny oraz każdy wierzchołek ma pętlę.

Ponieważ część krawędzi grafu G' tworzy ekspander o parametrze ekspansywności h_0 , więc cały graf ma parametr ekspansywności równy co najmniej h_0 .

Ponieważ grafy G i G' mają taki sam zbiór wierzchołków i alfabet, mają również te same wartościowania. Na wszystkich dodanych krawędziach umieściliśmy więzy, które są zawsze spełnione, zatem optymalne wartościowanie dla G jest również optymalnym wartościowaniem dla G' . Zatem:

$$UNSAT(G') = \frac{UNSAT(G) \cdot |E|}{|E'|} = UNSAT(G) \cdot \frac{d}{d + d_0 + 1}.$$

Twierdzenie jest prawdziwe ze stałą $\beta_2 = \frac{d}{d + d_0 + 1}$. ■

Dowód tw. 4.3: Do grafu więzów $G = ((V, E), \Sigma, \mathcal{C})$ stosujemy najpierw tw. 4.4, a następnie tw. 4.5. Otrzymamy $(d+d_0+1)$ -regularny ekspander G' o parametrze ekspansywności $h_0 > 0$. Każdy wierzchołek w grafie G' ma pętlę.

Graf G' ma $2 \cdot |E|$ wierzchołków oraz $|E| \cdot (d+d_0+1)$ krawędzi, więc jego rozmiar jest liniowy względem rozmiaru G ($\text{rozmiar}(G) = |V| + |E| \cdot \Sigma^2$, $\text{rozmiar}(G') = 2 \cdot |E| + |E| \cdot (d+d_0+1) \cdot \Sigma^2$).

Ponadto $UNSAT(G') \in [\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot UNSAT(G), UNSAT(G)]$. Zatem twierdzenie jest prawdziwe ze stałą $h = h_0$ i $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2$. ■

4.3. Błądzenie losowe po ekspanderach

Ekspandery mają tę własność, że z dowolnego wierzchołka już w niewielkiej liczbie kroków można dojść do dużej liczby wierzchołków.

Własność ta jest często wykorzystywana przy błądzeniu losowym, które wykonujemy następująco: startujemy z dowolnego wierzchołka i w każdym kroku idziemy losową krawędzią wychodzącą z wierzchołka, w którym aktualnie jesteśmy. Każda krawędź jest wybierana z takim samym prawdopodobieństwem (niezależnie od tego, czy jest to zwykła krawędź, czy pętla).

Okazuje się, że przy błądzeniu losowym możemy szybko uniezależnić się od tego, który wierzchołek został wybrany jako początkowy.

Twierdzenie 4.6 *Niech $G = (V, E)$ będzie d -regularnym ekspanderem o drugiej wartości własnej λ_2 . Zbiór $F \subseteq E$ jest dowolnym zbiorem krawędzi. Niech s będzie losową ścieżką w G , której pierwsza krawędź należy do F . Wówczas prawdopodobieństwo, że $(i+1)$ -sza krawędź ścieżki s również należy do F , jest ograniczone z góry przez $\frac{|F|}{|E|} + \left(\frac{|\lambda_2|}{d}\right)^i$.*

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w pracy [2].

Twierdzenie 4.7 *Niech $G = (V, E)$ będzie d -regularnym ekspanderem o drugiej wartości własnej λ_2 . Zbiór $F \subseteq E$ jest dowolnym zbiorem krawędzi. Niech s będzie losową ścieżką w G , $i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$. Wtedy prawdopodobieństwo, że i -ta oraz j -ta krawędź tej ścieżki należą do F jest ograniczone z góry przez $\frac{|F|}{|E|} \cdot \left(\frac{|F|}{|E|} + \left(\frac{|\lambda_2|}{d}\right)^{j-i}\right)$.*

Dowód: Oznaczmy i -tą oraz j -tą krawędź ścieżki s odpowiednio przez e_i, e_j . Korzystamy z poprzedniego twierdzenia i otrzymujemy:

$$\Pr[e_i \in F, e_j \in F] = \Pr[e_i \in F] \cdot \Pr[e_j \in F | e_i \in F] \leq \frac{|F|}{|E|} \cdot \left(\frac{|F|}{|E|} + \left(\frac{|\lambda_2|}{d}\right)^{j-i}\right).$$

■

Rozdział 5

Potęgowanie grafu

W tym rozdziale zajmiemy się operacją potęgowania grafu. W wyniku tej operacji na podstawie grafu G otrzymujemy nowy graf G^t , który ma taki sam zbiór wierzchołków co G , a każda krawędź w G^t odpowiada pewnej ścieżce w G .

W dalszej części rozdziału pokażemy, jak można zastosować tę operację do powiększenia luki aproksymacji w problemie spełnialności grafu więzów. Aby pokazać, że nasza operacja zwiększa lukę aproksymacji, będziemy musieli wykonać trochę rachunków.

5.1. Operacja potęgowania

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem nieskierowanym. Graf G^t ($t \in \mathbb{N}$) tworzymy następująco:

- zbiorem wierzchołków grafu G^t jest V ,
- dla każdej ścieżki długości t w grafie G tworzymy w G^t krawędź łączącą oba końce tej ścieżki.

Z powyższej konstrukcji wynika, że graf G^t może mieć krawędzie wielokrotne oraz pętle. Liczba krawędzi (u, v) w grafie G^t jest równa liczbie ścieżek długości t , łączących wierzchołki u i v w grafie G . Jeśli G jest grafem d -regularnym, to G^t jest grafem d^t -regularnym.

Niech $G = ((V, E), \Sigma, \mathcal{C})$ będzie d -regularnym grafem więzów. Dla takiego grafu również możemy wykonać operację potęgowania. Zbiór wierzchołków i krawędzi w grafie G^t tworzymy tak samo, jak przy potęgowaniu zwykłego grafu.

Powstaje pytanie, jaki powinien być alfabet oraz więzy w grafie G^t . Wartością wierzchołka $v \in V$ w grafie G^t są jego „opinie” o wszystkich wierzchołkach, do których można dojść z v (tym razem w grafie G) ścieżką długości $\lceil t/2 \rceil$. Ścieżek takich jest $d^{\lceil t/2 \rceil}$, więc graf G^t ma alfabet $\Sigma^{d^{\lceil t/2 \rceil}}$. (Jeśli między wierzchołkami v i w jest k ścieżek długości $\lceil t/2 \rceil$, to wierzchołek v będzie przechowywał k — być może różnych — opinii o w).

Teraz opiszemy sposób tworzenia więzów w G^t . Niech (v, w) będzie krawędzią w G^t . Wartościowanie σ przypisuje wierzchołkom v i w opinie o wartościach pewnych wierzchołków w grafie G . Jeśli dostaniemy sprzeczne opinie o jakimś wierzchołku, to więz na krawędzi (v, w) nie będzie spełniony. (Jeśli wierzchołek v ma dwie różne opinie o jakimś wierzchołku, to automatycznie więzy dla wszystkich krawędzi o końcu w v nie będą spełnione). Jeśli wierzchołki v, w mają opinie a_1, a_2 o wierzchołkach $v_1, v_2 \in V$, a ponadto $(v_1, v_2) \in E$ oraz $(a_1, a_2) \notin c((v_1, v_2))$, to więz (v, w) również nie jest spełniony. W przeciwnym razie więz (v, w) jest spełniony.

Z powyższej metody konstrukcji więzów wynika, że dla każdego grafu istnieje optymalne wartościowanie, przy którym żaden wierzchołek nie ma sprzecznych opinii o innych wierzchołkach.

5.2. Potęgowanie grafu a luka aproksymacji

Pozostaje pokazać, że operacja potęgowania grafu opisana powyżej, zastosowana do grafu otrzymanego z tw. 4.3, zwiększa lukę aproksymacji.

Z konstrukcji grafu G^t widać, że jeśli $UNSAT(G) = 0$, to $UNSAT(G^t) = 0$. Teraz pokażemy, że jeśli wartość $UNSAT(G)$ jest odpowiednio mała, to zachodzi $UNSAT(G^t) \geq \Theta(\sqrt{t}) \cdot UNSAT(G)$.

Twierdzenie 5.1 *Istnieje stała $\beta > 0$, zależna tylko od $h, d, |\Sigma|$, że dla dowolnego $t \in \mathbb{N}$ oraz dowolnego d -regularnego grafu więzów G o parametrze ekspansywności h , w którym każdy wierzchołek ma pętlę, zachodzi: $UNSAT(G^t) \geq \beta \cdot \sqrt{t} \cdot \min(UNSAT(G), \frac{1}{t})$.*

Dowód: Niech $G = ((V, E), \Sigma, \mathcal{C})$, $G^t = ((V, E'), \Sigma^{d^{\lceil t/2 \rceil}}, \mathcal{C}')$. Oznaczmy przez σ' optymalne wartościowanie dla grafu G^t , w którym każdy wierzchołek ma jednoznaczną opinię o swoich sąsiadach. Opinię wierzchołka v o wierzchołku w przy wartościowaniu σ' oznaczmy $\sigma'_w(v)$.

Na podstawie wartościowania σ' skonstruujemy wartościowanie σ dla grafu G tak, aby $UNSAT_{\sigma'}(G^t)$ było odpowiednio duże w porównaniu z $UNSAT_{\sigma}(G)$.

Niech $v \in V$. W grafie G mamy $d^{\lceil t/2 \rceil}$ ścieżek długości $\lceil t/2 \rceil$, wychodzących z v . Dla każdej takiej ścieżki, kończącej się w pewnym wierzchołku $w \in V$, patrzymy na wartość $\sigma'_w(w)$. Jako $\sigma(v)$ bierzemy tę wartość, która wystąpiła najwięcej razy.

Niech $F \subseteq E$ będzie zbiorem krawędzi, których więzy nie są spełnione przy wartościowaniu σ oraz takim, że $\frac{|F|}{|E|} = \min(UNSAT_{\sigma}(G), \frac{1}{t})$. (Jeżeli $UNSAT_{\sigma}(G) \leq \frac{1}{t}$, jest to zbiór wszystkich krawędzi, których więzy nie są spełnione przy σ).

W dalszej części rozdziału udowodnimy następujący lemat:

Lemat 5.2 *Prawdopodobieństwo, że więz dla losowo wybranej krawędzi $e' \in E'$ nie jest spełniony, wynosi co najmniej $\beta \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{|F|}{|E|}$, gdzie β jest pewną stałą zależną tylko od d, h oraz $|\Sigma|$.*

Z tego lematu otrzymujemy dowód naszego twierdzenia: $UNSAT(G^t) = UNSAT_{\sigma'}(G^t)$ jest równe prawdopodobieństwu, że więz dla losowej krawędzi $e' \in E'$ nie jest spełniony (przy wartościowaniu σ'), czyli wynosi co najmniej $\beta \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{|F|}{|E|} = \beta \cdot \sqrt{t} \cdot \min(UNSAT_{\sigma}(G), \frac{1}{t}) \geq \beta \cdot \sqrt{t} \cdot \min(UNSAT(G), \frac{1}{t})$. ■

5.3. Rachunki

Teraz udowodnimy lemat z poprzedniego podrozdziału, dzięki czemu zakończymy dowód twierdzenia 5.1.

Dowód lematu 5.2: Krawędź $e' \in E'$ możemy utożsamić z krotką $(v_0, \dots, v_t) \in V^{t+1}$ — opisuje ona kolejne wierzchołki ścieżki, której odpowiada krawędź e' . Więz dla takiej krawędzi może nie być spełniony w różnych przypadkach. Jeden z takich przypadków występuje, gdy dla pewnej krawędzi $(v_{i-1}, v_i) \in E$ zachodzi: $(v_{i-1}, v_i) \in F$, $\sigma'_{v_{i-1}}(v_0) = \sigma(v_{i-1})$, $\sigma'_{v_i}(v_t) = \sigma(v_i)$.

Niech $I = (\lceil \frac{t}{2} \rceil - \sqrt{t}, \lceil \frac{t}{2} \rceil + \sqrt{t}) \cap \mathbb{N}$ będzie zbiorem indeksów. Dla $i \in I$ definiujemy zmienną losową $N_i(e')$, która dla $e' = (v_0, \dots, v_t) \in E'$ przyjmuje następujące wartości:

$$N_i(e') = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } (v_{i-1}, v_i) \in F, \sigma'_{v_{i-1}}(v_0) = \sigma(v_{i-1}), \sigma'_{v_i}(v_t) = \sigma(v_i) \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

Jeśli dla pewnego $i \in I$ zachodzi $N_i(e') = 1$, to więc dla krawędzi e' nie jest spełniony. Niech $N(e') = \sum_{i \in I} N_i(e')$. Wtedy prawdopodobieństwo, że więc dla krawędzi e' nie jest spełniony, wynosi co najmniej $Pr_{e'}[N(e') > 0]$.

Zmienna losowa N przyjmuje wyłącznie nieujemne wartości, zatem zachodzi:

$$E[N] = E[N|N > 0] \cdot Pr[N > 0] \text{ oraz}$$

$$E[N^2] = E[N^2|N > 0] \cdot Pr[N > 0] \geq E^2[N|N > 0] \cdot Pr[N > 0].$$

Z tego otrzymujemy, że $\frac{E^2[N]}{E[N^2]} \leq Pr[N > 0]$. Wykażemy później, że zachodzą następujące nierówności:

Lemat 5.3 $E_{e'}[N(e')] \geq \beta_1 \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{|F|}{|E|}$ dla pewnej stałej $\beta_1 > 0$, zależnej tylko od d oraz $|\Sigma|$.

Lemat 5.4 $E_{e'}[(N(e'))^2] \leq \beta_2 \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{|F|}{|E|}$, dla pewnej stałej $\beta_2 > 0$, zależnej tylko od h oraz d .

Korzystając z nich otrzymujemy, że prawdopodobieństwo, że więc dla krawędzi $e' \in E'$ nie jest spełniony, wynosi co najmniej: $Pr_{e'}[N(e') > 0] \geq \frac{E^2[N]}{E[N^2]} \geq \frac{\beta_1^2}{\beta_2} \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{|F|}{|E|} = \beta \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{|F|}{|E|}$. ■

Udowodnimy teraz, że powyższe lematy zachodzą. W tym celu najpierw przedstawimy jeszcze jeden lemat:

Lemat 5.5 Niech $v \in V$ będzie wierzchołkiem w grafie G . Prawdopodobieństwo, że losowa ścieżka długości $k \in I$, rozpoczynająca się w wierzchołku v , kończy się w pewnym wierzchołku $w \in V$, dla którego zachodzi $\sigma'_v(w) = \sigma(v)$, wynosi co najmniej $\tau \cdot \frac{1}{|\Sigma|}$, dla pewnej stałej $\tau > 0$.

Idea dowodu: Ze sposobu, w jaki generowaliśmy wartościowanie σ , wynika bezpośrednio, że dla $k = \lceil t/2 \rceil$ prawdopodobieństwo naszego zdarzenia wynosi co najmniej $\frac{1}{|\Sigma|}$.

Ponieważ każdy wierzchołek w G ma co najmniej jedną pętlę oraz k nie różni się od $\lceil t/2 \rceil$ o więcej niż \sqrt{t} , ścieżki długości k często będą się kończyć w tych samych wierzchołkach, co ścieżki długości $\lceil t/2 \rceil$. Rozbijając wszystkie krawędzie ścieżek na krawędzie „istotne” oraz „nieistotne” (w zależności od tego, czy są to pętle) można pokazać, że prawdopodobieństwo naszego zdarzenia wynosi co najmniej $\tau \cdot \frac{1}{|\Sigma|}$ dla pewnej stałej $\tau > 0$, gdzie τ zależy wyłącznie od stałych d oraz $|\Sigma|$.

Szczegółowy dowód tego lematu można znaleźć w pracy [2].

Dowód lematu 5.3: Niech $i \in I$. Obliczymy teraz $E[N_i(e')]$. W tym celu będziemy wybierać losową krawędź e' z grafu G^t . Każda krawędź w G^t reprezentuje pewną ścieżkę (v_0, \dots, v_t) w G . Krawędź e' konstruujemy następująco:

- wybieramy losową krawędź $(v_{i-1}, v_i) \in E$,
- z wierzchołka v_{i-1} wybieramy w grafie G losową ścieżkę długości $i-1$ — kolejne wierzchołki tej ścieżki zapamiętujemy jako $v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_0$,
- z wierzchołka v_i wybieramy w grafie G losową ścieżkę długości $t-i$ — kolejne wierzchołki tej ścieżki zapamiętujemy jako v_i, v_{i+1}, \dots, v_t .

W ten sposób każda ścieżka długości t w grafie G , a więc również każda krawędź w G^t , jest wybierana z takim samym prawdopodobieństwem.

Obliczmy teraz prawdopodobieństwo, że dla tak utworzonej krawędzi e' zachodzi $N_i(e') = 1$, czyli jednocześnie zachodzą zdarzenia $(v_{i-1}, v_i) \in F$, $\sigma'_{v_{i-1}}(v_0) = \sigma(v_{i-1})$, $\sigma'_{v_i}(v_t) = \sigma(v_i)$.

Z lematu 5.5 wynika, że prawdopodobieństwo każdego ze zdarzeń $\sigma'_{v_{i-1}}(v_0) = \sigma(v_{i-1})$ oraz $\sigma'_{v_i}(v_t) = \sigma(v_i)$ wynosi co najmniej $\tau \cdot \frac{1}{|\Sigma|}$ i nie jest zależne od tego, czy $(v_{i-1}, v_i) \in F$.

$$\text{Zatem } E[N_i] = Pr[N_i(e') = 1] \geq \frac{|F|}{|E|} \cdot \tau^2 \cdot \left(\frac{1}{|\Sigma|}\right)^2$$

oraz $E[N] = \sum_{i \in I} E[N_i] \geq \beta_1 \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{|F|}{|E|}$ dla pewnej stałej $\beta_1 > 0$. ■

Dowód lematu 5.4: Niech $e' = (v_0, \dots, v_t) \in E'$. Rozważmy zmienne losowe Z_i , dla $i \in I$, określone następująco:

$$Z_i(e') = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } (v_{i-1}, v_i) \in F \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

Niech $Z(e') = \sum_{i \in I} Z_i(e')$. Wartością zmiennej $Z(e')$ jest liczba krawędzi ze zbioru $F \subseteq E$, przez które przechodzi ścieżka e' w swojej środkowej części (gdy indeksy należą do zbioru I). Oczywiście zachodzi $N(e') \leq Z(e')$, więc:

$$E[N^2] \leq E[Z^2] = E\left[\sum_{i,j \in I} Z_i Z_j\right] = \sum_{i,j \in I} E[Z_i Z_j] = \sum_{i \in I} E[Z_i] + 2 \cdot \sum_{i,j \in I, i < j} E[Z_i Z_j].$$

Z twierdzenia 4.7 otrzymujemy, że dla $i < j$ zachodzi: $E[Z_i Z_j] \leq \frac{|F|}{|E|} \cdot \left(\frac{|F|}{|E|} + \left(\frac{|\lambda_2|}{d}\right)^{j-i}\right)$.

Graf G ma parametr ekspansywności równy co najmniej h , więc z twierdzenia 4.1 istnieje stała $C < 1$ (zależna tylko od h i d) taka, że $\frac{|\lambda_2|}{d} < C$. Zatem

$$E[N^2] \leq |I| \cdot \frac{|F|}{|E|} + 2 \cdot \sum_{i,j \in I, i < j} \frac{|F|}{|E|} \cdot \left(\frac{|F|}{|E|} + C^{j-i}\right).$$

Ponieważ $|I| = 2 \cdot \sqrt{t}$ oraz $\frac{|F|}{|E|} \leq \frac{1}{t}$

$$E[N^2] \leq |I| \cdot \frac{|F|}{|E|} + \left(|I| \cdot \frac{|F|}{|E|}\right)^2 + |I| \cdot \frac{|F|}{|E|} \cdot \sum_{i=1}^{2\sqrt{t}} C^i \leq \beta_2 \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{|F|}{|E|},$$

gdzie $\beta_2 > 0$ jest pewną stałą zależną tylko od parametru ekspansywności h oraz d . ■

Rozdział 6

Zmniejszanie rozmiaru alfabetu

W tym rozdziale opisana jest operacja zmniejszania rozmiaru alfabetu w grafie więzów. Po przedstawieniu tej operacji będziemy mieli wszystkie elementy dowodu twierdzenia PCP. Dowód ten opisany jest na końcu rozdziału.

6.1. Operacja zmniejszania rozmiaru alfabetu

Mamy pewien graf więzów $G = ((V, E), \Sigma, \mathcal{C})$. Chcemy na jego podstawie, dla pewnego ustalonego alfabetu Σ_0 , utworzyć graf $G' = ((V', E'), \Sigma_0, \mathcal{C}')$ spełniający następujące warunki:

- $\text{rozmiar}(G') \leq C_\Sigma \cdot \text{rozmiar}(G)$, gdzie C_Σ jest pewną stałą zależną tylko od $|\Sigma|$.
- $UNSAT(G') \in [\gamma \cdot UNSAT(G), UNSAT(G)]$ dla pewnej stałej $\gamma > 0$.

Do konstrukcji grafu G' użyjemy redukcji \mathcal{P} , która przekształca formułę ϕ w postaci CNF w graf więzów G_ϕ taki, że:

- jeśli ϕ jest spełnialna, to $UNSAT(G_\phi) = 0$,
- jeśli ϕ nie jest spełnialna, to $UNSAT(G_\phi) \geq \alpha$ dla pewnej stałej α .

Nie nakładamy ograniczeń na czas działania redukcji \mathcal{P} — może być on wykładniczy. Nie stanowi to problemu, ponieważ redukcję będziemy wykonywać wyłącznie dla danych wejściowych stałego rozmiaru.

Wróćmy teraz do konstrukcji grafu G' . Kolejne części tego grafu będziemy tworzyć na podstawie kolejnych krawędzi grafu G . Wiąż dla krawędzi $e = (v, w)$ możemy przekształcić do formuły CNF ϕ o zmiennych logicznych v_i, w_i . Sposób, w jaki możemy utworzyć taką formułę, został opisany w rozdziale 2.3, jednak my będziemy to robić trochę inaczej. Dla formuły ϕ możemy wykonać redukcję \mathcal{P} i otrzymamy graf więzów G_e . Rozmiar takiego grafu zależy tylko od $|\Sigma|$. Graf G' będzie sumą grafów G_e .

Musimy jednak zwrócić uwagę na jedną rzecz: Często występuje sytuacja, że każdy więz z osobna jest spełnialny, ale nie istnieje wartościowanie, dla którego są spełnione wszystkie więzy jednocześnie. Jeśli grafy G_e będą tworzone przez niezależne wywołania redukcji \mathcal{P} , będą miały niezależne zbiory wierzchołków. Dzięki temu będzie można utworzyć niezależne wartościowania dla wszystkich grafów G_e , przy których wszystkie więzy będą spełnione. Zatem musimy zapewnić spójność między poszczególnymi wywołaniami redukcji \mathcal{P} — na przykład poprzez tworzenie wspólnych wierzchołków dla tych grafów. Aby spójność mogła zostać zachowana, musimy nałożyć pewne ograniczenia na redukcję \mathcal{P} .

Twierdzenie 6.1 Dla pewnego alfabetu Σ_0 (takiego, że $0, 1 \in \Sigma_0$) i stałej $\varepsilon > 0$ istnieje redukcja \mathcal{R} , która przekształca formułę postaci CNF ϕ o zbiorze zmiennych X w graf więzów $G = ((V, E), \Sigma_0, \mathcal{C})$ taki, że $X \subseteq V$ oraz spełnione są następujące warunki:

- Niech $a : X \rightarrow \{0, 1\}$ będzie wartościowaniem ϕ . Jeśli $UNSAT_a(\phi) = 0$, to istnieje wartościowanie $b : (V \setminus X) \rightarrow \Sigma_0$, dla którego zachodzi $UNSAT_{a \cup b}(G) = 0$,
- Niech $a : X \rightarrow \Sigma_0$ będzie wartościowaniem. Jeśli $dist(a, SAT(\phi)) > 0$, to dla każdego wartościowania $b : (V \setminus X) \rightarrow \Sigma_0$ zachodzi $UNSAT_{a \cup b}(G) \geq \varepsilon \cdot dist(a, SAT(\phi))$,

gdzie $dist(a, SAT(\phi)) \in [0, 1]$ oznacza najmniejszy procent zmiennych, na których wartościowanie a różni się od jakiegoś wartościowania spełniającego formułę ϕ .

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w pracy [2]. Zauważmy, że nie nakładamy ograniczeń na czas działania redukcji \mathcal{R} oraz na rozmiar wyniku — mogą być one wykładnicze w stosunku do rozmiaru danych wejściowych.

Wykażemy teraz, że zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.2 Istnieje alfabet Σ_0 oraz stała $\gamma > 0$ taka, że dowolny graf więzów $G = ((V, E), \Sigma, \mathcal{C})$ można w czasie wielomianowym przekształcić do postaci grafu więzów $G' = ((V', E'), \Sigma_0, \mathcal{C}')$ tak, aby zachodziły warunki:

- $rozmiar(G') \leq C_\Sigma \cdot rozmiar(G)$, gdzie C_Σ jest stałą zależną tylko od $|\Sigma|$,
- $UNSAT(G') \in [\gamma \cdot UNSAT(G), UNSAT(G)]$.

Dowód: Każdej zmiennej $v \in V$ nad alfabetem Σ odpowiada $l = \Theta(\log |\Sigma|)$ zmiennych logicznych v_i . Każdemu wartościowaniu σ zmiennej v możemy przypisać pewne wartościowanie σ' zmiennych v_i . Wykorzystując kody korygujące błędy o odległości względnej ρ możemy zapewnić, że różnym wartościowaniom zmiennej v odpowiadają wartościowania zmiennych v_i różniące się na co najmniej $l \cdot \rho$ zmiennych. Oczywiście im większe jest ρ , tym większa musi być liczba zmiennych l .

Dla każdej krawędzi $(u, v) \in E$ możemy utworzyć formułę logiczną ϕ w postaci CNF o zmiennych u_i, v_i tak, że ϕ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy wartościowania zmiennych u_i i v_i reprezentują jakieś wartościowania zmiennych u i v oraz gdy więz dla krawędzi (u, v) jest spełniony przy tych wartościowaniach.

Dla tak utworzonej formuły ϕ wykonujemy redukcję \mathcal{R} opisaną w twierdzeniu 6.1. W wyniku tej redukcji dostaniemy graf więzów $G_{(u,v)}$, w którym część wierzchołków odpowiada zmiennym u_i, v_i .

Chcemy, aby wszystkie grafy odpowiadające poszczególnym krawędziom miały tę samą liczbę krawędzi. W tym celu dla każdej krawędzi $e \in E$ z grafu G_e tworzymy graf G'_e , który ma te same wierzchołki co G_e oraz tyle samo krawędzi, co największy z grafów G_e . Możemy zrobić to w taki sposób, żeby grafy G_e i G'_e miały podobny współczynnik $UNSAT$:

$$\frac{1}{2} \cdot UNSAT(G_e) \leq UNSAT(G'_e) \leq 2 \cdot UNSAT(G_e).$$

Graf G' powstaje jako suma grafów G'_e dla wszystkich krawędzi $e \in E$, z tym, że wszystkie wierzchołki odpowiadające tej samej zmiennej v_i (dla wszystkich $v \in V$) skleamy w jeden wierzchołek. Krawędzi nie skleamy, więc może powstać dużo krawędzi między jedną parą wierzchołków.

Pokażemy teraz, że dla tak utworzonego grafu G' zachodzą warunki podane w twierdzeniu:

$$1) \text{rozmiar}(G') \leq C_\Sigma \cdot \text{rozmiar}(G)$$

Dane wejściowe dla redukcji \mathcal{R} stanowią formuła ϕ o $2 \cdot l$ zmiennych. Dla każdego z 2^{2l} wartościowań formuła może być spełniona lub nie. Zatem możemy mieć 2^{2l} istotnie różnych danych wejściowych. W każdym przypadku na wyjściu dostaniemy jakiś graf. Niech C będzie rozmiarem największego z tych grafów. Wtedy $\text{rozmiar}(G') \leq C \cdot \text{rozmiar}(G)$, gdzie stała C zależy tylko od l , czyli od rozmiaru alfabetu Σ oraz współczynnika korekcji ρ .

$$2) \text{UNSAT}(G') \geq \gamma \cdot \text{UNSAT}(G)$$

Niech $\sigma' : V' \rightarrow \Sigma_0$ będzie optymalnym wartościowaniem dla G' . Na jego podstawie wygenerujemy wartościowanie σ dla grafu G w następujący sposób: Niech $v \in V$. Każdemu wartościowaniu zmiennej v odpowiada pewne wartościowanie zmiennych v_i . Jako $\sigma(v)$ bierzemy taką wartość, żeby odpowiadające jej wartościowanie zmiennych v_i różniło się jak najmniej od $\sigma'(v_i)$.

Naszym celem jest pokazanie, że wówczas $\text{UNSAT}_{\sigma'}(G') \geq \gamma \cdot \text{UNSAT}_\sigma(G)$. Niech $F \subseteq E$ będzie zbiorem tych krawędzi, których więzy nie są spełnione przy wartościowaniu σ . Pokażemy, że dla każdej krawędzi $e = (u, v) \in F$ pewien stały procent więzów grafu G_e nie jest spełniony przy wartościowaniu σ' .

Z własności redukcji \mathcal{R} wiemy, że $\text{UNSAT}(G_e) \geq \text{dist}(\sigma'|_{u_i, v_i}, \text{SAT}(\phi))$, gdzie ϕ jest formułą odpowiadającą krawędzi e . Przypomnijmy, że formuła ϕ jest spełniona wtw. gdy wartościowanie dla zmiennych u_i, v_i reprezentuje pewne wartościowanie zmiennych u i v oraz wartościowanie to spełnia więź dla krawędzi (u, v) .

Ponieważ $(u, v) \in F$, więź wartościowanie σ' nie spełnia formuły ϕ . Aby więź dla krawędzi (u, v) był spełniony, należy zmienić wartość $\sigma(u)$ lub $\sigma(v)$. Przypuśćmy, że jest to $\sigma(u)$. Ponieważ użyliśmy kodów korygujących błędy o odległości względnej ρ , trzeba w tym celu zmienić co najmniej $\rho/2$ procent wartości u_i , a więc co najmniej $\rho/4$ procent wartości wszystkich zmiennych formuły. Zachodzi więc:

$$\text{UNSAT}_{\sigma'}(G'_{(u,v)}) \geq \frac{1}{2} \text{UNSAT}_{\sigma'}(G_{(u,v)}) \geq \varepsilon \cdot \rho/8.$$

Ponieważ wszystkie grafy G'_e mają taką samą liczbę krawędzi, zatem

$$\text{UNSAT}(G') = \text{UNSAT}_{\sigma'}(G') \geq \rho/8 \cdot \varepsilon \cdot \text{UNSAT}_\sigma(G) \geq \gamma \cdot \text{UNSAT}(G)$$

dla stałej $\gamma = \rho/8 \cdot \varepsilon$.

$$3) \text{UNSAT}(G') \leq \text{UNSAT}(G)$$

Niech σ będzie optymalnym wartościowaniem dla G . Na podstawie tego wartościowania możemy wygenerować wartościowanie σ' w grafie G' w sposób następujący: Dla wszystkich $v \in V$ wierzchołkom v_i przypisujemy wartościowanie odpowiadające $\sigma(v)$. Każdy z pozostałych wierzchołków $w \in V'$ należy do dokładnie jednego z grafów $G'_{(u,v)}$. W każdym z grafów $G'_{(u,v)}$ znajdujemy optymalne wartościowanie, przy ustalonych wcześniej wartościach $\sigma'(u_i), \sigma'(v_i)$.

Wtedy z własności redukcji \mathcal{R} dla każdej krawędzi $e \in E$ zachodzi: jeśli więź dla e jest spełniony przy wartościowaniu σ , to wszystkie więzy w grafie G'_e są spełnione przy wartościowaniu σ' . Ponieważ wszystkie grafy G'_e mają ten sam rozmiar, zachodzi:

$$\text{UNSAT}(G) = \text{UNSAT}_\sigma(G) \geq \text{UNSAT}_{\sigma'}(G') \geq \text{UNSAT}(G').$$

■

6.2. Dowód twierdzenia PCP

Teraz możemy pokazać, że twierdzenie PCP jest prawdziwe. W tym celu wykorzystamy zgromadzone informacje dotyczące grafów więzów.

Twierdzenie 6.3 *Niech $G = ((V, E), \Sigma, \mathcal{C})$ będzie grafem więzów. Wówczas na podstawie tego grafu możemy w czasie wielomianowym utworzyć graf więzów G' o alfabecie Σ_0 , dla którego zachodzi:*

- $\text{rozmiar}(G') \leq C_\Sigma \cdot \text{rozmiar}(G)$,
- jeśli $UNSAT(G) = 0$, to również $UNSAT(G') = 0$,
- jeśli $UNSAT(G) > 0$, to $UNSAT(G') \geq \min(\alpha, 2 \cdot UNSAT(G))$,

dla pewnej stałej α , stałego alfabetu Σ_0 , oraz stałej C_Σ zależnej od $|\Sigma|$.

Dowód: Konstrukcja grafu G' składa się z trzech części, które zostały wcześniej udowodnione jako twierdzenia 4.3, 5.1 oraz 6.2.

W pierwszym kroku z grafu G otrzymamy graf więzów $G_1 = ((V', E'), \Sigma, \mathcal{C}')$, który jest d -regularnym ekspanderem o parametrze ekspansywności h , w którym każdy wierzchołek ma pętlę oraz zachodzi: $UNSAT(G') \geq \alpha_1 \cdot UNSAT(G)$, dla pewnych stałych d, h oraz α_1 , niezależnych od G .

W kolejnym kroku z grafu G_1 otrzymujemy graf więzów $G_1^t = ((V', E''), \Sigma^{d^{\lceil t/2 \rceil}}, \mathcal{C}'')$, dla którego zachodzi $UNSAT(G_1^t) \geq \alpha_2 \cdot \sqrt{t} \cdot \min(UNSAT(G), \frac{1}{t})$ dla pewnej stałej α_2 zależnej tylko od h, d oraz $|\Sigma|$.

W ostatnim korku z grafu G_1^t otrzymujemy graf więzów $G' = ((V'', E'''), \Sigma_0, \mathcal{C}''')$ oraz zachodzi: $UNSAT(G') \geq \alpha_3 \cdot UNSAT(G_1^t)$ dla pewnej stałej α_3 .

Zatem dostajemy:

$$UNSAT(G') \geq \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \sqrt{t} \cdot \min(\alpha_1 \cdot UNSAT(G), \frac{1}{t}) \geq \min(\alpha, 2 \cdot UNSAT(G))$$

dla odpowiednio dobranych t oraz α .

Zauważmy, że każdym krokiem z grafu spełnialnego powstawał również graf spełnialny. Ponadto rozmiar grafu wzrastał liniowo, zależnie tylko od $|\Sigma|, d$ oraz t .

Zatem otrzymany graf G' spełnia warunki podane w treści twierdzenia. ■

Dowód twierdzenia PCP: Pokażemy, że istnieje stała $\alpha' > 0$ taka, że dla problemu spełnialności grafu więzów rozróżnienie przypadków $UNSAT(G) = 0$ i $UNSAT(G) \geq \alpha'$ jest NP-trudne.

Niech $G = ((V, E), \Sigma, \mathcal{C})$ będzie grafem więzów. Wtedy zachodzi: $UNSAT(G) = 0$ lub $UNSAT(G) \geq \frac{1}{|E|}$. Wykonując $O(\log n)$ razy operację opisaną w twierdzeniu 6.3 z grafu G otrzymamy graf G' , dla którego zachodzi:

- jeśli $UNSAT(G) = 0$, to $UNSAT(G') = 0$,
- jeśli $UNSAT(G) > 0$, to $UNSAT(G') \geq \alpha'$

dla pewnej stałej α' . Ponieważ problem spełnialności grafu więzów jest NP-trudny, więc również rozróżnienie przypadków $UNSAT(G') = 0$ i $UNSAT(G') \geq \alpha'$ jest NP-trudne.

Z twierdzenia 2.1 otrzymujemy, że problem GAP 3SAT z pewnym stałym współczynnikiem α jest NP-trudny. ■

Rozdział 7

Przykłady zastosowań twierdzenia PCP

Używając twierdzenia PCP, możemy pokazywać trudność aproksymacji różnych problemów NP-trudnych. W tym rozdziale znajduje się kilka przykładów.

7.1. Problem GAP 3SAT z ograniczoną liczbą wystąpień zmiennych

Dla $k > 0$ problem GAP 3SAT(k) jest ograniczeniem problemu GAP 3SAT do formuł, w których każda zmienna występuje nie więcej niż k razy.

Twierdzenie 7.1 *Istnieją stałe $k, \alpha_1 > 0$, dla których problem GAP 3SAT(k) ze współczynnikiem α_1 jest NP-trudny.*

Dowód: Przeprowadzimy redukcję z problemu GAP 3SAT. Niech ϕ będzie formułą 3CNF o zbiorze zmiennych X . Chcemy na jej podstawie utworzyć formułę 3CNF ψ , w której każda zmienna występuje co najwyżej k razy, a ponadto dla pewnej stałej $\alpha > 0$ zachodzi:

- jeśli $UNSAT(\phi) = 0$, to $UNSAT(\psi) = 0$,
- jeśli $UNSAT(\phi) > 0$, to $UNSAT(\psi) \geq \alpha \cdot UNSAT(\phi)$.

Każdej zmiennej $x \in X$ będzie odpowiadać tyle nowych zmiennych x_i , ile razy zmienna x występuje w ϕ . Dla formuły ψ tworzymy takie same klauzule co dla ϕ , z tym że każde wystąpienie zmiennej x zastępujemy inną zmienną x_i (dla wszystkich $x \in X$).

Teraz, za pomocą dodatkowych klauzul w formule ψ , będziemy chcieli wymusić, aby w każdym optymalnym wartościowaniu formuły ψ wszystkie zmienne x_i miały przypisaną tę samą wartość. W tym celu użyjemy ekspanderów.

Z twierdzenia 4.2 wiemy, że istnieją stałe $d_0, h_0 > 0$, dla których istnieje rodzina d_0 -regularnych ekspanderów o parametrze ekspansywności h_0 . Zwiększając stopnie wierzchołków (na przykład poprzez utworzenie kilku kopii każdej krawędzi), możemy zwiększyć parametr ekspansywności. Zatem dla pewnego $d > 0$ istnieje rodzina ekspanderów \mathcal{G} o stopniu wierzchołków d i parametrze ekspansywności $h > 1$.

Dla każdej zmiennej $x \in X$ wykonujemy następujące operacje: Tworzymy ekspander G_x o parametrze ekspansywności h i wierzchołkach x_i . Dla każdej krawędzi (x_i, x_j) ekspandera dodajemy do formuły ψ klauzule $(x_i \vee \neg x_j)$ oraz $(x_j \vee \neg x_i)$. Są one jednocześnie spełnione wtw. gdy zmienne x_i oraz x_j mają przypisane te same wartości.

Pokażemy, że w optymalnym wartościowaniu wszystkie zmienne x_i mają przypisaną tę samą wartość. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy zmienne x_i możemy podzielić na dwa podzbiory A_1 i A_2 ($|A_1| \leq |A_2|$) tak, żeby w każdym ze zbiorów znalazły się zmienne, które mają to samo wartościowanie. Wtedy nie jest spełnione co najmniej $E(A_1, A_2) > |A_1|$ klauzul odpowiadających krawędziom ekspandera G_x . Zatem, zmieniając wartościowanie zmiennych ze zbioru A_1 , otrzymamy lepsze wartościowanie formuły ψ (co najmniej $|A_1| + 1$ niespełnionych klauzul będzie teraz spełnionych kosztem co najwyżej $|A_1|$ klauzul, które mogły przestać być spełnione). Ponieważ założyliśmy, że poprzednie wartościowanie było optymalne, dochodzimy do sprzeczności. Zatem w optymalnym wartościowaniu wszystkie zmienne x_i (dla $x \in X$) mają przypisaną tę samą wartość.

W tak utworzonej formule ψ każda zmienna występuje dokładnie $2d + 1$ razy ($k = 2d + 1$). W optymalnym wartościowaniu wszystkie klauzule odpowiadające krawędziom ekspandera będą spełnione. Niespełnionych klauzul będzie zatem tyle samo, co przy optymalnym wartościowaniu formuły ϕ . Otrzymujemy więc, że $UNSAT(\psi) = \frac{1}{2d+1} \cdot UNSAT(\phi)$.

Z twierdzenia PCP wiemy, że istnieje stała $\beta > 0$, dla której rozróżnienie przypadków $UNSAT(\phi) = 0$ oraz $UNSAT(\phi) \geq \beta$ jest NP-trudne. Zatem również rozróżnienie przypadków $UNSAT(\psi) = 0$ i $UNSAT(\psi) \geq \frac{1}{2d+1} \cdot \beta$ jest NP-trudne. Z tego wynika, że problem GAP 3SAT($2d + 1$) ze współczynnikiem $\alpha_1 = \frac{1}{2d+1} \cdot \beta$ jest NP-trudny. ■

Twierdzenie 7.2 *Istnieje stała $\alpha_2 > 0$, dla której problem GAP 3SAT(3) ze współczynnikiem α_2 jest NP-trudny.*

Dowód: Przeprowadzimy redukcję z problemu GAP 3SAT(k), gdzie k jest stałą z twierdzenia 7.1. Niech ϕ będzie formułą 3CNF, w której każda zmienna występuje co najwyżej k razy. Na podstawie formuły ϕ utworzymy formułę ψ , w której każda zmienna występuje co najwyżej 3 razy oraz zachodzi:

- jeśli $UNSAT(\phi) = 0$, to $UNSAT(\psi) = 0$,
- jeśli $UNSAT(\phi) > 0$, to $UNSAT(\psi) \geq \alpha \cdot UNSAT(\phi)$,

dla pewnej stałej $\alpha > 0$.

Formułę ψ tworzymy następująco: tak jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia, dla każdej zmiennej x formuły ϕ każde wystąpienie tej zmiennej zastępujemy nową zmienną x_i . W ten sposób dla każdej zmiennej x powstanie tyle zmiennych x_i , ile razy x występuje w ϕ .

Teraz dla każdej zmiennej x formuły ϕ , której odpowiada n zmiennych x_1, \dots, x_n , dodajemy do ψ klauzulę: $(x_1 \vee \neg x_2), (x_2 \vee \neg x_3), \dots, (x_{n-1} \vee \neg x_n), (x_n \vee \neg x_1)$. Wszystkie takie klauzule są jednocześnie spełnione wtw. gdy wszystkie zmienne x_i mają przypisaną tę samą wartość.

Niech σ_1 będzie optymalnym wartościowaniem dla formuły ψ . Na podstawie tego wartościowania utworzymy wartościowanie σ_2 — być może o większym współczynniku $UNSAT$, ale takie, dla którego wszystkie zmienne x_i mają przypisaną tę samą wartość. Wartościowanie to tworzymy następująco: każdej zmiennej x_i przyporządkowujemy tę wartość, która występowała częściej jako $\sigma_1(x_i)$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$.

Założmy, że dla pewnej zmiennej x formuły ϕ zmienne x_i nie miały przypisanej jednej wartości $\sigma_1(x_i)$. Wtedy co najmniej jedna klauzula postaci $(x_i \vee \neg x_{i+1})$ lub $(x_n \vee \neg x_1)$, która nie była spełniona przy wartościowaniu σ_1 , będzie spełniona przy wartościowaniu σ_2 . Poza tym co najwyżej $k/2$ klauzul, które były spełnione przy wartościowaniu σ_1 , teraz nie będzie spełnionych (ponieważ zmieniliśmy wartościowanie co najwyżej $k/2$ zmiennych x_i). Zatem

$$UNSAT(\psi) = UNSAT_{\sigma_1}(\psi) \geq \frac{2}{k} \cdot UNSAT_{\sigma_2}(\psi).$$

Na podstawie wartościowania σ_2 możemy wygenerować wartościowanie σ dla formuły ϕ — każdej zmiennej x przyporządkowujemy wartość $\sigma_2(x_i)$. W formule ϕ przy tym wartościowaniu będzie tyle samo niespełnionych więzów, co w formule ψ przy wartościowaniu σ_2 .

Liczba klauzul formuły ψ jest co najwyżej cztery razy większa od liczby klauzul ϕ , otrzymujemy więc: $UNSAT_{\sigma_2}(\psi) \geq \frac{1}{4} \cdot UNSAT_{\sigma}(\phi)$, zatem $UNSAT(\psi) \geq \frac{1}{2k} \cdot UNSAT(\phi)$.

Z twierdzenia 7.1 wiemy, że istnieje stała $\alpha_1 > 0$, dla której rozróżnienie przypadków $UNSAT(\phi) = 0$ oraz $UNSAT(\phi) \geq \alpha_1$ jest NP-trudne. Zatem rozróżnienie przypadków $UNSAT(\psi) = 0$ i $UNSAT(\psi) \geq \frac{1}{2k} \cdot \alpha_1$ też jest NP-trudne. Z tego wynika, że problem GAP 3SAT(3) ze współczynnikiem $\alpha_2 = \frac{1}{2k} \cdot \alpha_1$ jest NP-trudny. ■

7.2. Minimalne pokrycie wierzchołkowe i maksymalny zbiór niezależny

W tym rozdziale wykażemy trudność aproksymacji dla problemu minimalnego pokrycia wierzchołkowego i maksymalnego zbioru niezależnego.

Definicja 7.1 *Problem minimalnego pokrycia wierzchołkowego: dla danego grafu nieskierowanego $G = (V, E)$ znaleźć najmniejszy zbiór $V' \subseteq V$ taki, że każda krawędź ma co najmniej jeden koniec w V' .*

Definicja 7.2 *Problem maksymalnego zbioru niezależnego: dla danego grafu nieskierowanego $G = (V, E)$ znaleźć największy zbiór $V' \subseteq V$ taki, że żadne dwa wierzchołki należące do V' nie są połączone krawędzią.*

Powyższe problemy są dualne: dopełnieniem minimalnego pokrycia wierzchołkowego jest maksymalny zbiór niezależny. Zachodzą następujące twierdzenia:

Twierdzenie 7.3 *Istnieje stała $\alpha_3 > 0$, dla której aproksymacja problemu maksymalnego zbioru niezależnego ze współczynnikiem α_3 jest NP-trudna.*

Twierdzenie 7.4 *Istnieje stała $\alpha_4 > 0$, dla której aproksymacja problemu minimalnego pokrycia wierzchołkowego ze współczynnikiem α_4 jest NP-trudna.*

Najpierw udowodnimy pomocnicze twierdzenie:

Twierdzenie 7.5 *Istnieje wielomianowa redukcja, która przekształca formułę 3CNF ϕ w graf $G = (V, E)$ taki, że:*

- jeśli $UNSAT(\phi) = 0$, to $S(G) = \frac{1}{3}|V|$,
- jeśli $UNSAT(\phi) > 0$, to $S(G) = \frac{1}{3}|V| \cdot (1 - UNSAT(\phi))$,

gdzie $S(G)$ oznacza rozmiar maksymalnego zbioru niezależnego w grafie G .

Dowód: Redukcja wygląda następująco: Możemy przyjąć, że każda klauzula składa się z trzech literalów. Jeśli tak nie jest, możemy powielić któryś z literalów klauzuli, nie zmieniając wartości $UNSAT(\phi)$. Teraz dla każdej klauzuli formuły ϕ tworzymy trzy wierzchołki grafu G (każdy z nich odpowiada jednemu literalowi w danej klauzuli). Krawędzie w G tworzymy w następujący sposób:

- łączymy wierzchołki, które odpowiadają literalom z jednej klauzuli,

- łączymy wierzchołki, jeżeli jeden odpowiada jakiejś zmiennej, a drugi negacji tej zmiennej.

Pokażemy teraz, że $S(G)$ jest równe maksymalnej liczbie klauzul, które mogą być spełnione w formule ϕ .

Niech σ będzie optymalnym wartościowaniem formuły ϕ . Dla każdej spełnionej klauzuli wybieramy jeden literal, który jest spełniony przy tym wartościowaniu. Wierzchołki grafu G odpowiadające tym literalom tworzą zbiór niezależny (wszystkie wierzchołki odpowiadają literalom z różnych klauzul, a poza tym nie mogliśmy jednocześnie wybrać wierzchołków odpowiadających pewnej zmiennej i jej zaprzeczeniu). Zatem $S(G)$ jest równe co najmniej liczbie klauzul spełnionych przy optymalnym wartościowaniu.

Niech $V' \subseteq V$ będzie maksymalnym zbiorem niezależnym w G . Na podstawie tego zbioru wygenerujemy wartościowanie σ formuły ϕ , które spełnia co najmniej $|V'|$ klauzul. Rozpatrujemy kolejno wszystkie zmienne x formuły — jeśli do zbioru V' należy wierzchołek odpowiadający zmiennej x lub jej negacji, to jako $\sigma(x)$ przyjmujemy odpowiednio wartość *TRUE* lub *FALSE*. Pozostałe zmienne wartościujemy dowolnie.

Przy takim wartościowaniu wszystkie literały, którym odpowiadają wierzchołki z V' , są spełnione. Ponieważ wszystkie z nich należą do różnych klauzul, więc w wartościowaniu σ jest co najmniej $|V'|$ spełnionych klauzul. Zatem $S(G)$ jest równe co najwyżej liczbie klauzul spełnionych przy optymalnym wartościowaniu.

Pokazaliśmy, że $S(G)$ jest równe maksymalnej liczbie klauzul, które mogą być spełnione w formule ϕ . Ponieważ liczba klauzul jest równa $\frac{1}{3}|V|$, więc $S(G) = \frac{1}{3}|V| \cdot (1 - UNSAT(\phi))$. Dla $UNSAT(\phi) = 0$ zachodzi $S(G) = \frac{1}{3}|V|$. ■

Dowód tw. 7.3: Z twierdzenia PCP wiemy, że istnieje stała $\beta > 0$, dla której rozróżnienie przypadków $UNSAT(\phi) = 0$ oraz $UNSAT(\phi) \geq \beta$ jest NP-trudne. Zatem z twierdzenia 7.5 rozróżnienie przypadków $S(G) = \frac{1}{3}|V|$ i $S(G) \leq \frac{1}{3}|V| \cdot (1 - \beta)$ jest NP-trudne. Otrzymujemy więc, że aproksymacja problemu maksymalnego zbioru niezależnego ze współczynnikiem $(1 - \beta)$ jest NP-trudna. ■

Dowód tw. 7.4: Niech $C(G)$ oznacza rozmiar minimalnego pokrycia wierzchołkowego w grafie G . Korzystamy z twierdzenia 7.5. Ponieważ maksymalny zbiór niezależny jest dopełnieniem minimalnego pokrycia wierzchołkowego, możemy przeprowadzić wielomianową redukcję, która na podstawie formuły 3SAT ϕ generuje graf $G = (V, E)$, dla którego zachodzi:

- jeśli $UNSAT(\phi) = 0$, to $C(G) = \frac{2}{3}|V|$,
- jeśli $UNSAT(\phi) > 0$, to $C(G) = \frac{2}{3}|V| \cdot (1 + \frac{UNSAT(\phi)}{2})$.

Z twierdzenia PCP wiemy, że istnieje stała $\beta > 0$, dla której rozróżnienie przypadków $UNSAT(\phi) = 0$ oraz $UNSAT(\phi) \geq \beta$ jest NP-trudne. Zatem rozróżnienie przypadków $C(G) = \frac{2}{3}|V|$ i $C(G) = \frac{2}{3}|V| \cdot (1 + \frac{\beta}{2})$ jest NP-trudne. Pokazaliśmy, że aproksymacja problemu minimalnego pokrycia wierzchołkowego ze współczynnikiem $(1 + \frac{\beta}{2})$ jest NP-trudna. ■

7.3. Problem LABELCOVER

Problem LABELCOVER jest jednym z podstawowych problemów dotyczących trudności aproksymacji. Korzystając z niego, można udowodnić trudność aproksymacji wielu innych problemów NP-trudnych. Problem LABELCOVER występuje w dwóch wersjach — minimalizacji i maksymalizacji. My zajmiemy się tą drugą wersją.

Definicja 7.3 *Problem LABELCOVER*: dany jest regularny graf dwudzielny $G = (V_1, V_2, E)$ oraz liczba $N \in \mathbb{N}$. Ponadto, dla każdej krawędzi $e \in E$, dana jest funkcja częściowa $f_e : \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$.

Etykietowaniem grafu G nazywamy funkcję $g : (V_1 \cup V_2) \rightarrow \{1, \dots, N\}$, która każdemu wierzchołkowi przyporządkowuje etykietę. Etykietowanie g pokrywa krawędź $(v_1, v_2) \in E$ (dla $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$), jeżeli $f_{(v_1, v_2)}(g(v_1)) = g(v_2)$.

Rozwiązanie problemu polega na znalezieniu etykietowania, które pokrywa największą liczbę krawędzi.

Pokażemy, że zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 7.6 *Istnieje stała $\alpha_5 > 0$, dla której aproksymacja problemu LABELCOVER ze współczynnikiem α_5 jest NP-trudna.*

Dowód: Pokażemy wielomianową redukcję, która na podstawie formuły 3CNF ϕ , w której każda zmienna występuje co najwyżej 3 razy, wyznacza regularny graf dwudzielny G , liczbę etykiet N oraz funkcje f_e dla krawędzi takie, dla których zachodzi:

- jeśli $UNSAT(\phi) = 0$, to w G istnieje etykietowanie, które pokrywa wszystkie krawędzie,
- jeśli $UNSAT(\phi) > 0$, to przy każdym etykietowaniu G zostaje co najmniej $\frac{1}{9} \cdot UNSAT(\phi)$ procent niepokrytych krawędzi.

Redukcję wykonujemy następująco: Tworzymy graf dwudzielny $G_1 = (V_1, V_2, E)$, w którym wierzchołki V_1 odpowiadają poszczególnym klauzulom formuły, natomiast V_2 — zmiennym. Wierzchołki odpowiadające klauzuli i zmiennej łączymy krawędzią, jeśli dana zmienna (lub jej negacja) występuje w tej klauzuli. Liczba etykiet wynosi 8. Są one postaci (a_1, a_2, a_3) , dla $a_i \in \{0, 1\}$. Dla wierzchołków ze zbioru V_1 etykiety odpowiadają wartościom kolejnych zmiennych występujących w klauzuli. Dla wierzchołków ze zbioru V_2 etykiety postaci $(a_1, 0, 0)$ oznaczają wartościowanie odpowiedniej zmiennej równe a_1 . Pozostałe etykiety dla wierzchołków z V_2 nie są używane — nie pokrywają żadnych krawędzi.

Niech (v_1, v_2) będzie krawędzią w G_1 . Wtedy zmienna v_2 (lub jej negacja) pojawia się w klauzuli v_1 . Każde etykietowanie (a_1, a_2, a_3) wierzchołka v_1 wyznacza jakieś wartościowanie zmiennych klauzuli. Funkcję częściową $f_{(v_1, v_2)}$ definiujemy następująco:

- jeśli klauzula nie jest spełniona przy wartościowaniu kolejnych zmiennych (a_1, a_2, a_3) , to $f_{(v_1, v_2)}((a_1, a_2, a_3))$ nie jest określone,
- jeśli klauzula jest spełniona przy wartościowaniu (a_1, a_2, a_3) , to jako $f_{(v_1, v_2)}((a_1, a_2, a_3))$ przyjmujemy taką etykietę wierzchołka v_2 , która nadaje zmiennej v_2 tę samą wartość, co etykietowanie wierzchołka v_1 .

Stoień każdego wierzchołka wynosi co najwyżej 3. Dodając co najwyżej $2|E|$ nowych krawędzi, które mogą być łatwo spełnione, możemy utworzyć z G_1 graf regularny G , dla którego zachodzi: $\frac{1}{3} \cdot UNSAT(G_1) \leq UNSAT(G) \leq UNSAT(G_1)$.

Etykiety zmiennych V_2 tworzą wartościowanie klauzuli. Jeśli wartościowanie to spełnia formułę ϕ , to można nadać wszystkim wierzchołkom V_1 takie wartości, aby wszystkie krawędzie w G_1 były pokryte. Jeśli wartościowanie to nie spełnia ϕ , to każdej niespełnionej klauzuli odpowiada co najmniej jedna niepokryta krawędź. Zatem co najmniej $\frac{1}{3} \cdot UNSAT(\phi)$ krawędzi grafu G_1 (a więc co najmniej $\frac{1}{9} \cdot UNSAT(\phi)$ krawędzi grafu G) będzie niepokrytych.

Z twierdzenia 7.2 wiemy, że istnieje stała $\alpha_2 > 0$, dla której rozróżnienie przypadków $UNSAT(\phi) = 0$ i $UNSAT(\phi) \geq \alpha_2$ jest NP-trudne. Zatem dla problemu LABELCOVER

rozróżnienie przypadków, w których najlepsze etykietowanie pokrywa wszystkie krawędzie lub nie pokrywa co najmniej $\frac{1}{9} \cdot \alpha_2$ procent krawędzi jest NP-trudne. Pokazaliśmy więc, że aproksymacja problemu LABELCOVER ze współczynnikiem $\frac{1}{9} \cdot \alpha_2$ jest NP-trudna. ■

Powyższe twierdzenie można wzmocnić. Można pokazać istnienie redukcji, tym razem działającej w czasie $2^{\text{poly}(\log n)}$, dzięki której uzyskujemy lukę aproksymacji równą $2^{\log^{1-\gamma} n}$ dla dowolnego $\gamma > 0$. Redukcja taka jest przedstawiona w pracy [1].

Z istnienia tej redukcji wynika, że aproksymacja problemu LABELCOVER ze współczynnikiem $2^{\log^{1-\gamma} n}$ (dla dowolnego ustalonego $\gamma > 0$) jest quasi-NP-trudna. Oznacza to, że jeśli potrafimy osiągnąć taki współczynnik aproksymacji w czasie wielomianowym, to każdy problem NP-zupełny możemy rozwiązać w czasie $2^{\text{poly}(\log n)}$.

Bibliografia

- [1] S. Arora, C. Lund, „*Hardness of approximations*”, z książki D. Hochbaum „*Approximation Algorithms for NP-hard Problems*”, PWS 1996
- [2] I. Dinur, „*The PCP theorem by gap amplification*”, ECCC Report TR05-046, 2005
- [3] I. Dinur, O. Reingold, „*Assignment testers: Towards a Combinatorial Proof of the PCP-Theorem*”, FOCS 2004
- [4] N. Linial, A. Wigderson, „*Expander Graphs and their Applications*” — notatki do wykładu, <http://www.math.ias.edu/~boaz/ExpanderCourse>
- [5] Vijay V. Vazirani, „*Algorytmy aproksymacyjne*”, WNT 2005