Egzamin z Grup Algebraicznych

Obowiązujący zakres materiału:

Grupy algebraiczne (liniowe): podstawowe własności grup, homomorfizmów, przykłady różnych grup algebraicznych i rzeczywistych grup Liego, działania grup na rozmaitościach, lemat o domkniętej orbicie (z dowodem).

Różniczkowania, różne interpretacje algebry Liego, homomorfizm algebr Liego stowarzyszony z homomorfizmem grup.

Tw. Chevalleya z dowodem i jego zastosowanie do konstrukcji ilorazu grup algebraicznych, iloraz przez podrupę normalną, rozmaitości jednorodne.

Reprezentacje grup algebraicznych tj. G-moduly, iloczyny tensorowe, potęgi symetryczne G-modulow, reprezentacja dołączona grupy Ad i algebry Liego ad, odwzorowanie exp, liczenie algebr Liego grup macierzowych.

Tw. Borela o punkcie stałym z dowodem i tw. Lie-Kolchina z dowodem,

Podgrupy Borela i paraboliczne i ich wlasności.

Rozkład Jordana: multyplikatywny i addytywny (z dowodami przynajmniej dla $GL(V)$ i ogólna idea sprowadzenia do tego przypadku).

Grupy diagonalizowalne i ich reprezentacje (z dowodem, że rozkładają się na sumę jednowymiarowych). Grupy unipotentne, reduktywne, półproste (definicje).

Odpowiedniość między grupami i algebrami Liego nad $\mathbb{C}$.

Zespolone grupy reduktywne z trikiem Weyla (dowód rozkładalności reprezentacji, zakładając, że grupa jest kompleksyfikacją zwartej grupy Liego).

Reprezentacje $SU(2)$ i $SL(2, \mathbb{C})$ z dowodem.

Struktura grup reduktywnych: torus maksymalny, rozkład Cartana, pierwiastki, kopierwiastki. Umiejętność policzenia diagramu Dynkina w najprostszych przykładach.

Reprezentacje: istnienie najwyższej wagi i podstawowe fakty o reprezentacjach.

Zalecana lektura:

1. T. A. Springer, Linear algebraic groups, Progress in Mathematics **9**
2. J. Humphreys, Linear algebraic groups, Graduate Texts in Mathematics **21**

Przykładowe zadania na egzamin (będzie parę zadań typu napisać coś z teorii; tu są tylko zadania praktyczne):

Zad. 1.
Pokazać, że grupa $Sp(n, k)$ jest spójna nad dowolnym ciałem k.

Zad. 2.
Pokazać, że jeśli H jest podgrupą algebraiczną grupy G, to jej algebra Liego składa się z tych $X \in \mathfrak{g}$, które zachowują ideał H w G.

Zad. 3.

Pokazać, że jeśli H jest normalną podgrupą algebraiczną grupy G, to jej algebra Liego spełnia $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$.

Zad. 4.

Znaleźć grupę charakterów $SO(4, k)$ i grupę charakterów torusa maksymalnego w $SO(4, k)$.

Zad. 5.

Pokazać, że iloczyn tensorowy części unipotentnych rozkładów Jordana 2 elementów $x \in GL(V)$ i $y \in GL(W)$ jest częścia unipotentną iloczynu $x \otimes y \in GL(V \otimes W)$.

Zad. 6.

Pokazać, że każda jednowymiarowa podgrupa zespolonej grupy liniowej G zawierająca nietrywialny element unipotentny u jest izomorficzna z $\mathbb{G}_a$ (wskazówka: pokazać, że jest to domknięcie podgrupy generowanej przez u).

Zad. 7.

Znaleźć rozkład reprezentacji dołączonej dla $SL(2, \mathbb{C})$ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.

Zad. 8.

Niech $G \to GL(V)$ będzie nieprzywiedlną reprezentacją. Znaleźć wszystkie G-niezmiennicze podprzestrzenie w $V \oplus V$.

Zad. 9.

Opisać rozkład Cartana i diagram Dynkina dla $PGL(n, \mathbb{C})$.

Zad. 10.

Pokazać, że odwzorowanie exp dla $U(n)$ jest surjekcją. Użyć tego do pokazania, że każdy element $U(n)$ jest zawarty w pewnym rzeczywistym torusie (oczywiście można inaczej ale ten argument działa częściej...). Czy każdy element kompleksyfikacji $SU(n)$ leży w pewnym algebraicznym podtorusie?

Zad. 11.

Załóżmy, że $G \subset GL(V)$ jest nieprzywiedlną reprezentac"ją. Pokazać, że G nie ma nietrywialnych normalnych podgrup unipotentnych.

Zad. 12.

Znaleźć algebrę Liego macierzy górnotrójkątnych w $SL(n)$.

Zad. 13.

Niech $G \subset GL(V)$. Pokazać, że podgrupy Borela grupy G są podgrupami, które ustalają pewną flagę $0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_s = V$, taką, że $\dim V_i = i$ (wskazówka: można użyć działania G na $\mathbb{P}^{s-1}$).