GAL Zadania przygotowawcze do kolokwium

Kolokwium będzie 6 maja od 8.30 do 10.05 zamiast (i w czasie) wykładu. Na kolokwium będzie 5 zadań z czego 3 będzie rachunkowe. Poprawne i pełne rozwiązanie zadań rachunkowych wystarczy do zaliczenia kolokwium.

Zadania teoretyczne są mniej przewidywalne, ale oczywiście będą dotyczyły przerobionego materiału. Jedno będzie nieprzewidywalne ale ciekawe, a drugie będzie dotyczyło pewnego wariantu twierdzenia z wykładu dotyczącego twierdzeń klasyfikacyjnych różnych form dwuliniowych.

Poniżej podaję przykłady zadań rachunkowych.

Postać Jordana:

Zad. 1.

Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym. Znaleźć w zależności od charakterystyki k bazę i postać Jordana dla następującej macierzy o współczynnikach z k:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć również multyplikatywny rozkład Jordana.

Zad. 2.

Obliczyć A^5, gdzie A jest macierzą z poprzedniego zadania.

Zad. 3.

Niech A będzie jak wyżej. Znaleźć rozwiązania równania

$$X^4 = A.$$

Które spośród rozwiązań są wielomianami A?

Wielomiany Legendre'a:

Zad. 4.

Znaleźć odległość x^k od przestrzeni $lin\{1, x, ..., x^{k-1}\}$ w przestrzeni wielomianów stopnia $\leq k$ z iloczynem skalarnym $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

Zad. 5.

Pokazać, że

$$\inf \left\{ \int_{-1}^{1} (x^n + f(x))^2 dx : f(x) \text{ wielomian stopnia } < n \right\} = \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)\binom{2n}{n}^2}.$$

Operatory samosprzężone, unitarne, hermitowskie, normalne:

Zad. 6.

Niech V będzie 2-wymiarową przestrzenią unitarną z bazą ortonormalną $\{e_1, e_2\}$. Pokazać, że operator $f : V \to V$ zadany w tej bazie macierzą

$$\begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{bmatrix}$$

jest hermitowski. Znaleźć widmo f i bazę ortonormalną w której macierz f jest diagonalna.

Zad. 7.

Pokazać, że operator zadany w pewnej bazie ortonormalnej macierzą

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

jest ortogonalny. Znaleźć postać i bazę kanoniczną dla tego operatora.

Zad. 8.

Pokazać, że operator zadany w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni unitarnej macierzą

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest normalny. Znaleźć rozkład spektralny dla tego operatora.

Zad. 9.

Znaleźć rozkład biegunowy operatora o macierzy z zadania 1. czy ten operator jest normalny?

Formy kwadratowe:

Zad. 10.

Wyznaczyć odwzorowanie ortogonalne sprowadzające formę kwadratową

$$9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$$

do osi głównych.

Bazy ortonormalne, ortogonalizacja Grama–Schmidta, odległość od podprzestrzeni.

Zad. 11.

Znaleźć w (standardowej) afinicznej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ odległość punktu $x = (2, 4, 0, -1)$ od podprzestrzni afinicznej V zadanej układem równań

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4.$$

Zad. 12.

W notacji poprzedniego zadania znaleźć barycentryczny układ współrzędnych płaszczyzny przechodzącej przez x, prostopadłej do V i przecinającej ją w dokładnie jednym punkcie.