Zadania przygotowawcze do kolokwium z Geometrii Algebraicznej 1

Uwaga: zadania przygotowawcze są różnej trudności i niekiedy wymagają trochę więcej czasu niż ten dostępny podczas kolokwium.

Zad. 1.

Niech $J = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, x_1x_2 + x_2x_3 + x_2x_3)$ będzie ideałem w $k[x_1, x_2, x_3]$. Znaleźć $I(V(J))$, znaleźć rozkład na składowe $V(J)$ i sprawdzić, czy są one rozmaitościami wymiernymi.

Zad. 2.

Niech f i g będą względnie pierwszymi wielomianami jednorodnymi n miennych, przy czym $\deg f = k$ i $\deg g = k - 1$. Pokazać, że rozmaitość

$$X = \{[x_0 : \cdots : x_n] : f(x_1, \ldots, x_n) + x_0 g(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

w $\mathbb{CP}^n$ jest wymierna.

Zad. 3.

Pokazać, że zbiór zer wielomianów $\sum_{i=0}^5 x_i$ i $(\sum_{i=0}^5 x_i^2)^2 - a \sum_{i=0}^5 x_i^4$ w $\mathbb{CP}^5$ jest izomorficzny z kwartyką w $\mathbb{CP}^4$ i znaleźć liczbę spójnych składowych zbioru punktów osobliwych tej rozmaitości dla $a = 2$ i $a = 4$.

Zad. 4.

Pokazać, że każde dwie gładkie kwadryki w $\mathbb{CP}^3$ są rzutowo równoważne, ale dwie ogólne gładkie kubiki w $\mathbb{CP}^3$ nie są rzutowo równoważne.

Zad. 5.

Niech C będzie podzbiorem $\mathbb{CP}^2$ zadanym jako zbiór zer jednorodnego nierozkładalnego wielomianu f stopnia d. Pokazać, że istnieje niepusty otwarty podzbiór U (w topologii Zariskiego) dualnej przestrzeni rzutowej $(\mathbb{CP}^2)^*$ taki, że prosta $L \in U$ przecina C w dokładnie d punktach (teorio-zbiorowo), a każda prosta $L \notin U$ przecina C w mniejszej ilości punktów.

Zad. 6.

Znaleźć przeciwobraz krzywej $xy - x^6 - y^6 = 0$ płaskiej przy rozdmuchaniu $\mathbb{A}^2$ w 0 i opisać osobliwości tego przeciwobrazu.

Zad. 7.

PokazaĆ, że dwie płaszczyzny w $\mathbb{A}^4$ przecinające się w dokładnie 1 punkcie nie są zupełnym przecięciem.

Zad. 8.

Zdefiniować złacze rozmaitości rzutowych i pokazać, że jest rozmaitością rzutową (na ćwiczeniach było dla afinicznych).

Zad. 9.

Niech $f : X \to Y$ będzie morfizmem rozmaitości afinicznych. Pokazać, że zbiór tych punktów $P \in X$ dla których włókno nad $f(P)$ jest gładkie nie musi być otwarty.

Zad. 10.

Pokazać, że rozmaitość quasi-rzutowa X ma wymiar $\geq n$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje dominujący morfizm $f : X \to \mathbb{P}^n$.

Zad. 11.

Policzyć liczbę krzywych płaskich stopnia 3 przechodzących przez 9 ogólnych punktów na płaszczyźnie. Wytłumaczyć "ogólność" używając zbioru otwartego w odpowiedniej przestrzeni parametryzującej 9 różnych punktów (jak ją skonstruować).