Geometria Algebraiczna, Seria 5

Zad. 1.

Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym. Rozmaitość X nad k nazywamy *wymierną*, jeśli dla pewnego n ciało funkcji wymiernych $k(X)$ nad X jest izomorficzne z ciałem $k(x_1, ..., x_n)$. Pokazać, że dla $m \geq 3$ krzywa $x^m + y^m = z^m$ w $\mathbb{P}^2_k$ nie jest wymierna, ale jest wymierna dla $m = 1, 2$.

Zad. 2.

Dla schematu X przez X_{top} oznaczamy przestrzeń topologiczną tego schematu a przez $X_0 \subset X_{top}$ podprzestrzeń punktów domkniętych. Pokazać, że dla dowolnych S-schematów X i Y:

1. Istnieje kanoniczna ciągła surjekcja
$$(X \times_S Y)_{top} \to X_{top} \times_{S_{top}} Y_{top}.$$
2. Niech $S = \operatorname{Spec} k$, gdzie k jest dowolnym ciałem (niekoniecznie alg. domkniętym). Jeśli $X = \operatorname{Spec} A$ i $Y = \operatorname{Spec} B$, gdzie A, B są skończenie generowanymi k-algebrami, to mamy kanoniczną ciągłą surjekcję
$$(X \times_S Y)_0 \to X_0 \times_{S_0} Y_0.$$
3. Czy jest prawdą, że przy założeniach w 2 mamy bijekcję
$$(X \times_S Y)(k) \to X(k) \times_{S(k)} Y(k)?$$

Zad. 3. (Włókna morfizmu)

R. Hartshorne "Algebraic Geometry", Chapter II, Exercise 3.10, p.92

Zad. 4. (można założyć wcześniejsze zadanie 2.16)

R. Hartshorne "Algebraic Geometry", Chapter II, Exercise 2.17, p.81

Zad. 5. (Domknięte podschematy i schemato-teoretyczny obraz)

R. Hartshorne "Algebraic Geometry", Chapter II, Exercise 3.11, p.92