Analiza* Seria 9

Zadania 1 – 5 są po 10 punktów.

Zad. 1.

Rozwinąć funkcję okresową o okresie 2π otrzymaną przez przedłużenie funkcji $f(x) = (\frac{\pi - x}{2})^2$ dla $x \in [0, 2\pi]$ w szereg Fouriera.

Zad. 2.

Pokazać, że

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt \sim \frac{4}{\pi} \ln n,$$

gdzie D_n oznacza jądro Dirichleta.

Zad. 3.

Pokazać, że jeśli funkcja okresowa o okresie 2π jest ciągła i kawałkami liniowa, to jej szereg Fouriera zbiega do niej jednostajnie.

Zad. 4.

Obliczyć promień zbieżności rozwinięcia w szereg potęgowy funkcji

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Zad. 5.

Załóżmy, że funkcja $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 i całka $\int_1^\infty |f'(x)|\, dx$ zbiega. Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka $\int_1^\infty f(x)\, dx$ jest zbieżna.