

Analiza* Seria 8

Zadania 1 – 5 są po 10 punktów.

Zad. 1.

Znaleźć wszystkie $p > 0$ dla których zbieżna jest całka

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx.$$

Zad. 2.

Znaleźć wszystkie p dla których zbieżna jest całka

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{(\operatorname{tg} x)^p} dx.$$

Zad. 3.

Wyznaczyć wszystkie p i q dla których zbieżna jest całka

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln(1+x) - \ln x)^q}{x^p} dx.$$

Zad. 4.

Pokazać, że

$$\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^2}\right).$$

Zad. 5.

Niech funkcja f będzie określona dla $|x| \leq 1$ wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Pokazać, że dla każdego $x \in (0, 1)$ zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = (\ln x) \ln(1-x) + f(x) + f(1-x).$$