Analiza* Seria 7

Zadania $1-5$ są po 10 punktów.

Zad. 1.

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{1}{2+2013\,\mathrm{tg}\,x}dx$$

dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Zad. 2.

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{1}{(2x^2-x+2)^{7/2}}dx.$$

Zad. 3.

Niech f będzie funkcją ciągłą na $[0,1]$. Pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx^2}\,dx = \frac{\pi}{2}f(0).$$

Zad. 4.

Pokazać, że jeśli f jest ciągła na $\mathbb{R}$ i okresowa o okresie 2π, to dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje funkcja postaci

$$P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$

taka, że $|f(x) - P(x)| < \epsilon$.

Zad. 5.

Niech p, q, r będą rakimi liczbami dodatnimi, że,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} = 1.$$

Niech $f \in L^p(\mathbb{R}), g \in L^q(\mathbb{R})$ i $h \in L^r(\mathbb{R})$. Pokazać, że $fgh \in L^1(\mathbb{R})$ i zachodzi nierówność

$$||fgh||_1 \leq ||f||_p||g||_q||h||_r,$$

gdzie $||\cdot||$ oznacza odpowiednie normy.