Analiza* Seria 6

Zadania $1-5$ są po 10 punktów.

Zad. 1.

Niech T_n oznacza n-ty wielomian Czebyszewa. Obliczyć całkę

$$\int_{-1}^{1} \frac{(T_n(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,$$

Zad. 2.

Obliczyć $\int_{-2}^{2} f\, d\alpha$ dla $f(x) = x^2$ oraz

$$\alpha(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \in [-2,-1], \\ 2 & \text{dla } x \in (-1,0), \\ x^2+3 & \text{dla } x \in [0,2]. \end{cases}$$

Zad. 3.

Niech $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby rzeczywistej x. Pokazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{nx\}}{n^2}$$

jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[0,7]$ i znaleźć wszystkie jej punkty nieciągłości.

Zad. 4.

Załóżmy, że funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, a jej pochodna jest funkcją ograniczoną i całkowalną w sensie Riemanna. Niech

$$a_n = \int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

Pokazać, że granica $\lim_{n\to\infty} na_n$ istnieje i obliczyć ją.

Zad. 5.

Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że dla każdego $x \in [0,1]$ spełnione są nierówności $f(x) \geq 0$ oraz

$$f(x)^2 \leq 1 + 2\int_0^x f(t)\, dt.$$

Pokazać, że $f(x) \leq x+1$ dla $x \in [0,1]$.