Analiza* Seria 5

Zadania 1 – 5 są po 10 punktów.

Zad. 1.

Załóżmy, że szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mają promienie zbieżności R_1 i R_2, odpowiednio. Pokazać, że promień zbieżności R szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ spełnia nierówność

$$R \geq R_1 R_2.$$

Czy istnieje przykład w którym $R_1 = R_2 = 0$, ale $R = \infty$?

Zad. 2.

Załóżmy, że ciąg $\{a_n\}$ liczb rzeczywistych przyjmuje tylko skończenie wiele wartości. Załóżmy, że szereg $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nie jest wielomianem.

1. Pokazać, że ten szereg ma promień zbieżności równy 1.

2. Załóżmy, że wszystkie a_n są liczbami wymiernymi. Czy funkcja $f(x)$ jest funkcją wymierną (tj. ilorazem dwóch wielomianów)?

Zad. 3.

Niech

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n^2}.$$

Obliczyć $\lim_{x \to 1^-} f(x)$.

Zad. 4.

Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji dwukrotnie różniczkowalnych na $[0, 1]$. Załóżmy, że dla każdego n mamy: $f_n(0) = f_n'(0) = 0$ oraz $|f_n''(x)| \leq 1$ dla $x \in [0, 1]$. Pokazać, że ciąg $\{f_n\}$ zawiera podciąg zbieżny jednostajnie na $[0, 1]$.

Zad. 5.

Niech

$$L(x) = \begin{cases} \frac{x \log(1/x)}{1-x} & \text{dla } x \in (0, 1), \\ 1 & \text{dla } x = 1. \end{cases}$$

Pokazać, że jeśli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, to

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n L(x^n) = s.$$