Analiza* Seria 4

Zadania 1 – 4 są po 10 punktów. Zadanie 5 jest za 15 punktów.

Zad. 1.

Pokazać, że współczynniki wszystkich wielomianów Taylora funkcji

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

w punkcie $x = 0$ są liczbami wymiernymi.

Zad. 2.

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^∞. Załóżmy, że w punkcie $x = 0$ funkcja ma minimum lokalne. Pokazać, że istnieje koło o środku na osi y, które leży nad wykresem funkcji f i dotyka go w punkcie $(0, f(0))$.

Zad. 3.

Niech (a_n) będzie ciągiem niezerowych liczb rzeczywistych. Pokazać, że ciąg funkcji $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określonych wzorami

$$f_n(x) = \frac{1}{a_n} \sin(a_n x) + \cos(x + a_n)$$

ma podciąg zbieżny do funkcji ciągłej.

Zad. 4.

Niech (a_n) będzie nierosnącym ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych. Załóżmy, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pokazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx)$$

jest ciągła dla $x \in (0, 2\pi)$. Czy funkcja ta musi być też ciągła dla $x = 0$?

Zad. 5.

Niech b będzie nieparzystą liczbą naturalną i niech $a \in (0, 1)$ będzie taką liczbą, że $ab > 6$. Pokazać, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona szeregiem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x),$$

jest ciągła ale nie jest nigdzie różniczkowalna.