Analiza* Seria 2

Zadania 1 – 4 są po 10 punktów. Zadanie 5 jest za 15 punktów.

Zad. 1.

Zbadać zbieżność punktową i jednostajną szeregu funkcyjnego

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n}.$$

Pokazać, że

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\frac{1}{2} \log 2.$$

Zad. 2. Pokazać, że

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \log(1 + n^2 x^2)$$

jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$. Pokazać, że f jest różniczkowalna dla $x \neq 0$, ale nie jest różniczkowalna dla $x = 0$.

Zad. 3.

Pokazać, że

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n - x}$$

jest funkcją klasy C^∞ na $\mathbb{R} - \mathbb{N}$ i spełnia równanie $f(x) - f(x-1) = \frac{1}{1-x}$.

Zad. 4.

Niech f i $f_n, n \in \mathbb{N}$ będą funkcjami z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$. Załóżmy, że dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do x mamy

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_n) = f(x).$$

Pokazać, że f jest funkcją ciągła (uwaga: nie zakładamy, że f_n są ciągłe).

Zad. 5.

Udowodnić lub podać kontrprzykład: jeśli $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest niemalejąca to istnieje ciąg funkcji ciągłych $\{f_n\}$ na $[0,1]$ taki, że dla dowolnego $x \in [0,1]$ mamy

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$