Analiza* Seria 2

Wszystkie zadania są po 10 punktów, mimo iż są bardzo różnej trudności (względnej) i niektóre są bardzo łatwe.

Zad. 1.

Niech $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną. Załóżmy, że liczby

$$M_k = \sup\{|f^{(k)}(x)| : x \in (a, +\infty)\}$$

są skończone dla $k = 0, 2$. Pokazać, że liczba M_1 też jest skończona i zachodzi nierówność

$$M_1^2 \leq 4M_0M_2.$$

Pokazać przykład funkcji spełniającej warunki zadania dla której zachodzi równość.

Zad. 2.

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją $(2n)$-krotnie różniczkowalną, $n \geq 1$. Załóżmy, że liczby

$$M_k = \sup\{|f^{(k)}(x)| : x \in \mathbb{R}\}$$

są skończone dla $k = 0, 1, ..., 2n$. Pokazać, że

$$M_n^2 \leq 2^{n^2} M_0 M_{2n}.$$

Zad. 3.

Niech P będzie wielomianem rzeczywistym stopnia $\leq n$, gdzie $n \geq 1$. Pokazać, że

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P'(x)| \leq n^2 \max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)|$$

i podać dla każdego n przykład pokazujący, że zachodzi równość.

Zad. 4.

Niech P będzie wielomianem rzeczywistym stopnia $n \geq 1$ o najstarszym współczynniku równym 1. Załóżmy, że dla każdego punktu $x \in [a, b]$ mamy $|P(x)| \leq 2$. Pokazać, że $b - a \leq 4$. Pokazać przykład wielomianu dla którego zachodzi równość.

Zad. 5.

Zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego $f_n(x) = \frac{nx}{n+x^2}$

1. na prostej $\mathbb{R}$,
2. na przedziale $[-a, a]$, $a > 0$.