Analiza* Seria 10

Zadania $1-5$ są po 10 punktów.

Zad. 1.

Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją o okresie 2π taką, że $f(x)=x^3$ dla $x\in[-\pi,\pi)$. Pokazać, że szereg Fouriera tej funkcji jest zbieżny dla każdego $x\in\mathbb{R}$ i obliczyć sumę tego szeregu Fouriera. Pokazać, że jeśli a_n i b_n oznaczają odpowiednie współczynniki szeregu Fouriera, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2\pi^6}{7}.$$

Zad. 2.

Czy istnieje taka funkcja ciągła $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, że $f(0)=f(1)$,

$$\int_0^1 xf(x)\,dx = 1$$

oraz

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$$

dla $n=0,2,3...$? Czy odpowiedź się zmieni jeśli nie zakładać, że $f(0)=f(1)$?

Zad. 3.

Niech $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będą ciągłymi funkcjami okresowymi o okresie 1. Pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1 g(x)\,dx.$$

Zad. 4.

Obliczyć

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{t\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Zad. 5.

Pokazać, że jeśli $P=[a,b]\subset\mathbb{R}$ dla pewnych rzeczywistych $a<b$, to

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \cos(nx)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \sin(nx)\,dx = 0.$$

Użyć tego do pokazania, że jeśli $\{a_n\}$ jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to zbiór tych $x\in[0,2\pi]$ dla których ciąg $\{\sin(a_n x)\}$ jest zbieżny nie zawiera żadnego domkniętego przedziału.