Analiza* Seria 1

Wszystkie zadania są po 10 punktów, mimo iż są bardzo różnej trudności (względnej) i niektóre są bardzo łatwe.

Zad. 1.

Niech

$$f(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{pmatrix}.$$

Czy istnieje $x_0 \in (0,1)$ takie, że $f'(x_0) = 0$?

Zad. 2.

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Załóżmy, że $ab > 0$. Pokazać, że istnieje takie $x_0 \in [a,b]$, że

$$\frac{1}{a-b} \det \begin{pmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{pmatrix} = f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

Zad. 3.

Niech $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Niech S będzie zbiorem liczb rzeczywistych postaci $\lim_{n\to\infty} f'(x_n)$ dla pewnego ciągu $\{x_n\}$ liczb nieujemnych który dąży do nieskończoności. Czy dla dowolnych elementów a, b zbioru S przedział $[a,b]$ musi być zawarty w S?

Zad. 4.

Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą i niech $x_0 \in (a,b)$. Pokazać, że jeśli $f''(x_0)$ istnieje, to

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} = f''(x_0).$$

Czy granica po lewej stronie może istnieć, jeśli $f''(x_0)$ nie istnieje?

Zad. 5.

Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy C^∞ takie, że $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ i jest spełnione równanie

$$f(x)f(y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$$

dla wszystkich x i y.