1.

$\forall^{60)}$ 20. Znajdź zbiór zbieżności i promień zbieżności następujących szeregów potęgowych:

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$;
(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}(x+1)^n$;
(c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}(x-1)^n$;
(d) $\sum_{n=0}^{+\infty} (2+(-1)^n)^n x^n$;
(e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{1000}}{\sqrt{n!}} x^n$;
(f) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^{1000}} x^n$;
(g) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\ln(2+n)} x^n$.

2.

21. Wykaż, że jeśli dwa szeregi potęgowe o środku w 0 i o dodatnich promieniach zbieżności mają równe sumy w pewnym przedziale $(-r; r)$, $r > 0$, to szeregi te są identyczne (tzn. mają te same ciągi współczynników). Powyższy fakt, to tzw. twierdzenie o jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy i jest ono uogólnieniem znanego faktu dotyczącego jednoznaczności współczynników wielomianu. Wskazówka: użyj sprytnie twierdzenia o ciągłości sumy szeregu potęgowego (tw. IV.14).

3.

$\forall$ 11. „Oblicz” sumy szeregów:

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$;
(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n \cdot n}$;
(c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{7^n}$.

4.

12. Znajdź $f^{(n)}(0)$:

(a) $f(x) = \frac{1}{2+3x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$, $n = 1001$.
(b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ dla $x \in \mathbb{R}$; $n = 999, n = 1000$.
(c) $f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$ dla $x \in (-1; 1)$; $n = 100$. Wskazówka: zapisz $f(x)$ jako $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$ dla pewnych $A, B \in \mathbb{R}$.

## 5.

Oblicz trzecią (prawo stronną)
pochodną w 0 funkcji f:[0,∞]->ℝ danej przez

$f(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$

Ile razy jest ta funkcja różniczkowalna w 0?