

# Metryzacja struktur zgrubnych i hiperbolizacja przestrzeni metrycznych

Aleksander Jankowski

15 marca 2007

## 1 Metryzacja struktur zgrubnych

Podczas poprzednich referatów wprowadziliśmy pojęcie struktury zgrubnej. Pokazaliśmy także, jak w naturalny sposób określić strukturę zgrubną na dowolnej przestrzeni metrycznej oraz na przestrzeni topologicznej z ustalonym uzwarceniem. W dalszej części będziemy badać związki między tymi strukturami zgrubnymi. Wpierw jednak przypomnijmy kilka definicji.

DEFINICJA 1.1. Strukturą zgrubną na  $X$  nazywamy zbiór  $\mathcal{E}$ , którego elementami są podzbiory  $X \times X$ , zawierający przekątną  $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$  oraz zamknięty ze względu na branie podzbiorów, odwrotności, produktów i skończonych sum. Elementy zbioru  $\mathcal{E}$  nazywamy *zbiorami kontrolowanymi*.

FAKT 1.2. Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną. Zbiór

$$\mathcal{E} = \{E \subset X \times X : \sup\{d(x, x') : (x, x') \in E\} < +\infty\}$$

jest strukturą zgrubną na zbiorze  $X$ .

DEFINICJA 1.3. Powyższy zbiór  $\mathcal{E}$  nazywamy *ograniczoną strukturą zgrubną* odpowiadającą metryce  $d$ .

FAKT 1.4. Niech  $X$  będzie parazwartą i lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa, zaś  $\bar{X}$  jej uzwarceniem. Wówczas zbiór

$$\mathcal{E} = \{E \subset X \times X : \text{cl } E \subset X \times X \cup \Delta_{\bar{X}}\}$$

jest spójną strukturą zgrubną na  $X$ .

DEFINICJA 1.5. Powyższy zbiór  $\mathcal{E}$  nazywamy *topologiczną strukturą zgrubną* dla przestrzeni  $X$  i jej uzwarcenia  $\bar{X}$ , bądź też, krócej, topologiczną strukturą zgrubną dla  $X \subset \bar{X}$ .

DEFINICJA 1.6. Strukturę zgrubną na zbiorze  $X$  będziemy nazywać *metryzowalną*, jeśli jest ona ograniczoną strukturą zgrubną odpowiadającą pewnej metryce na  $X$ .

Przypomnijmy, że

DEFINICJA 1.7. Powiemy, że przestrzeń metryczna  $X$  jest *właściwa*, gdy każdy zbiór domknięty i ograniczony w  $X$  jest zwarty w  $X$ .

FAKT 1.8. Niech  $(X, d)$  będzie właściwą przestrzenią metryczną. Wówczas ograniczona struktura zgrubna na  $X$  odpowiadająca metryce  $d$  równa jest topologicznej strukturze zgrubnej dla uzwarcenia Higsona przestrzeni  $X$ .

FAKT 1.9. Niech  $X$  będzie nieskończoną przestrzenią dyskretną oraz

$$\mathcal{E} = \{E \subset X \times X : \sup_{x \in X} \max(E^x, E_x) < \infty\}.$$

Wówczas  $\mathcal{E}$  jest strukturą zgrubną, nazywamy ją *uniwersalną strukturą ograniczoną* na  $X$ . Jej uzwarceniem Higsona jest uzwarcenie jednopunktowe  $\bar{X}$ , zaś topologiczną strukturą zgrubną dla  $X \subset \bar{X}$  jest antydyskretna struktura zgrubna.

Możemy teraz sformułować pierwszy przykład niemetryzowalnej struktury zgrubnej.

FAKT 1.10. Uniwersalna struktura ograniczona na  $X$  nie jest metryzowalna.

*Dowód.* Nie wprost. Gdyby uniwersalna struktura ograniczona na  $X$  była metryzowalna, to na mocy faktu 1.8 byłaby ona równa topologicznej strukturze zgrubnej dla uzwarcenia Higsona przestrzeni  $X$ , którą jest na mocy faktu 1.9 antydyskretna struktura zgrubna. Ale uniwersalna struktura ograniczona jest istotnie mniej zgrubna od struktury antydyskretnej.  $\square$

Będziemy w dalszej części badać, jakie struktury zgrubne są metryzowalne. Najpierw jednak udowodnimy, że pewna klasa struktur zgrubnych zmetryzować się w ogóle nie da.

TWIERDZENIE 1.11. Niech  $X$  będzie lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa, zaś  $\bar{X}$  jej metryzowalnym uzwarceniem. Wówczas topologiczna struktura zgrubna dla  $X \subset \bar{X}$  nie jest metryzowalna.

*Dowód.* Nie wprost. Przypuśćmy, wbrew tezie, że istnieje metryka  $d$  na  $X$  taka, że ograniczona struktura zgrubna  $\mathcal{E}$  odpowiadająca metryce  $d$  równa jest topologicznej strukturze zgrubnej dla  $X \subset \bar{X}$ .

Ustalmy punkt  $x \in \partial X$ . Skonstruujemy ciąg  $(x_k)$  punktów z  $X$  zbieżny do  $x$ . Możemy to uczynić, biorąc za  $x_k$  dowolny punkt ze zbioru  $B(x, \frac{1}{k}) \cap X$ . Ten zbiór jest niepusty, bo  $X$  jest gęsty w  $\bar{X}$ . Rozważmy teraz zbiór  $E_n = \{(x_n, x_k) : k = 1, 2, \dots\}$ . Wówczas  $(x_n, x) \in \text{cl } E_n$ , czyli  $\text{cl } E_n \not\subset X \times X \cup \Delta_{\bar{X}}$ . Zatem  $E_n \notin \mathcal{E}$ , z czego wnioskujemy, że metryka  $d$  rozpatrywana jako funkcja  $d(x_n, \cdot)$  jest nieograniczona dla każdego  $n$ .

Dla każdego  $n$ , korzystając z nieograniczoności metryki  $d$  po współrzędnych dla ciągu  $(x_n)$ , wybieramy  $y_n \in \{x_k : k \geq n\}$  takie, że  $d(x_n, y_n) \geq n$ . Wówczas zbiór  $F = \{(x_n, y_n) : n = 1, 2, \dots\}$  spełnia warunek  $\text{cl } F \subset X \times X \cup (x, x)$ , czyli  $F \in \mathcal{E}$ . Ale  $\sup\{d(x', x'') : (x', x'') \in F\} = +\infty$ , co leży w sprzeczności z założeniem, że  $\mathcal{E}$  jest ograniczoną strukturą zgrubną odpowiadającą metryce  $d$ .  $\square$

Warto podkreślić, że założenie o metryzowalności  $\bar{X}$  jest istotne.

Powyższe twierdzenie można częściowo odwrócić. Na poprzednim referacie pokazaliśmy następującą własność uzwarceń Higsona:

FAKT 1.12. Uzwanie Higsona  $hX$  właściwej przestrzeni zgrubnej  $X$  jest uniwersalnym uzwarceniem zgrubnym w następującym sensie: dla każdego innego uzwarcenia zgrubnego  $\bar{X}$  istnieje rozszerzenie identyczności na  $X$  do ciągłej surjekcji  $hX$  na  $\bar{X}$ .

Możemy teraz przedstawić

TWIERDZENIE 1.13. Niech  $X$  będzie właściwą przestrzenią metryczną z ograniczoną strukturą zgrubną. Wówczas uzwanie Higsona przestrzeni  $X$  nie jest metryzowalne.

*Szkic dowodu.* Istnieje metryka  $d$  na  $X$  taka, że struktura zgrubna  $\mathcal{E}$  na  $X$  jest ograniczoną strukturą zgrubną na  $X$  odpowiadającą metryce  $d$ . Wówczas na mocy tw. 1.8,  $\mathcal{E}$  równa jest topologicznej strukturze zgrubnej dla uzwarcenia Higsona  $hX$  przestrzeni  $X$ . Ale skoro  $hX$  jest uniwersalnym uzwarceniem zgrubnym, to istnieje ciągła surjekcja  $hX$  na uzwarcenie Stone'a-Čech'a przestrzeni  $X$  na  $hX$ . Ale skoro uzwarcenie Stone'a-Čech'a nie jest metryzowalne, to  $hX$  również.  $\square$

Przypomnijmy, że zachodzi następujący

**FAKT 1.14.** Niech  $S$  będzie rodziną podzbiorów  $X \times X$ . Wówczas istnieje najmniejsza struktura zgrubna  $\mathcal{E}$  na  $X$  zawierająca  $S$ .

**DEFINICJA 1.15.** Powyższą strukturę zgrubną  $\mathcal{E}$  nazywamy strukturą zgrubną *generowaną* przez  $S$ . Gdy zbiór  $S$  jest przeliczalny, to strukturę  $\mathcal{E}$  nazywamy *przeliczalnie generowaną*. Analogicznie, gdy zbiór  $S$  jest skończony, to strukturę  $\mathcal{E}$  nazywamy *skończenie generowaną*.

**PRZYKŁAD 1.16.** Niech  $X$  będzie dowolną przestrzenią, zaś  $x$  i  $y$  będą różnymi punktami z  $X$ . Wówczas struktura zgrubna generowana przez  $\{(x, y)\}$  jest złożona z wszystkich podzbiorów zbioru  $\Delta_X \cup \{(x, y), (y, x)\}$ .

**TWIERDZENIE 1.17.** Struktura zgrubna na  $X$  jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest przeliczalnie generowana.

*Dowód.* Załóżmy, że struktura zgrubna  $\mathcal{E}$  na  $X$  jest metryzowalna, czyli że istnieje metryka  $d$  na  $X$  taka, że  $\mathcal{E}$  jest ograniczoną strukturą zgrubną odpowiadającą metryce  $d$ . Wówczas  $\mathcal{E}$  jest generowana przez zbiory  $E_n = \{(x, x') : d(x, x') \leq n\}$  dla  $n = 1, 2, \dots$

Teraz załóżmy przeciwnie, że  $\mathcal{E}$  jest generowana przez przeliczalną rodzinę zbiorów  $E_n \subset X \times X$ , gdzie  $n = 1, 2, \dots$ . Zdefiniujemy przez indukcję ciąg  $(F_n)$  podzbiorów  $X \times X$ . Niech  $F_0 = \Delta_X$  oraz dla  $n > 0$  połóżmy

$$F_n = (F_{n-1} \circ F_{n-1}) \cup E_n \cup E_n^{-1}.$$

Przypomnijmy, że  $E' \circ E'' = \{(x', x'') : \exists x \in X (x', x) \in E', (x, x'') \in E''\}$  dla każdych  $E', E''$  oraz że  $E_n^{-1} = \{(x', x) : (x, x') \in E_n\}$ .

Wówczas zbiory  $F_n$  są symetryczne (czyli  $F_n = F_n^{-1}$ ) i spełniają warunek  $\Delta_X \subset F_{n-1} \subset F_{n-1} \circ F_{n-1} \subset F_n$ . Łatwo wykazać, że rodzina  $\mathcal{F}$  wszystkich podzbiorów  $X \times X$ , które zawierają się w którymś ze zbiorów  $F_n$ , jest strukturą zgrubną na  $X$ . Zamkniętość na branie podzbiorów i odwrotności jest oczywista. Jeśli  $F, F' \in \mathcal{F}$  to istnieją  $n$  i  $m$  takie, że  $F \subset F_n$  i  $F' \subset F_m$ . Wówczas  $F, F' \subset F_k$  gdzie  $k = \max(n, m)$  oraz  $F \circ F' \subset F_k \circ F_k \subset F_{k+1}$  i  $F \cup F' \subset F_k$ .

Ponieważ wszystkie generatory  $E_n$  należą do  $\mathcal{F}$ , to zachodzi  $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ . Z drugiej strony każdy  $F_n$  należy do  $\mathcal{E}$ , a więc  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ . Zachodzi zatem  $\mathcal{E} = \mathcal{F}$  i zbiory  $F_n$  generują  $\mathcal{E}$ .

Teraz wprowadźmy metrykę  $d$  następująco:

$$d(x, x') = \inf\{n \in \mathbb{N} : (x, x') \in F_n\}.$$

Trzeba wykazać, że  $d$  rzeczywiście jest metryką. Wystarczy sprawdzić nierówność trójkąta. Rozważmy parami różne  $x, x', x'' \in X$  i niech  $n = d(x, x')$ ,  $m = d(x', x'')$ . Wówczas  $(x, x') \in F_n \subset F_k$  oraz  $(x', x'') \in F_m \subset F_k$ , gdzie  $k = \max(n, m)$ . Zatem  $(x, x'') \in F_k \circ F_k \subset F_{k+1}$ , czyli

$$d(x, x'') \leq k + 1 = \max(d(x, x'), d(x', x'')) + 1 \leq d(x, x') + d(x', x''),$$

bo  $d(x, x') \geq 1$  i  $d(x', x'') \geq 1$ .  $\square$

Zauważmy, że metryka  $d$  wprowadzana w powyższym dowodzie może przyjmować wartość  $+\infty$ . Dzieje się tak wtedy i tylko wtedy, gdy struktura zgrubna  $\mathcal{E}$  nie jest spójna. Przypomnijmy, że

DEFINICJA 1.18. Strukturę zgrubną na  $X$  nazywamy *spójną*, gdy każdy punkt z  $X \times X$  należy do pewnego zbioru kontrolowanego.

PRZYKŁAD 1.19. Rozważmy dwie kopie  $\mathbb{N}_1$  i  $\mathbb{N}_2$  przestrzeni  $\mathbb{N}$  z naturalną metryką. Niech  $X = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$  oraz  $d$  będzie metryką na  $X$  dziedziczną ze składowych, przy czym dla  $x_1 \in \mathbb{N}_1, x_2 \in \mathbb{N}_2$  określamy  $d(x_1, x_2) = +\infty$ . Wówczas ograniczona struktura zgrubna na  $X$  odpowiadająca metryce  $d$  nie jest spójna.

Aby to zobaczyć, wygodnie jest utożsamić  $\mathbb{N}_1$  i  $\mathbb{N}_2$  odpowiednio z dodatnimi i ujemnymi liczbami całkowitymi.

PRZYKŁAD 1.20. Przypomnijmy, że *dyskretną strukturą zgrubną* na  $X$  nazywamy strukturę zgrubną złożoną ze wszystkich podzbiorów  $X \times X$ , które zawierają tylko skończenie wiele punktów poza przekątną  $\Delta_X$ . Okazuje się, że dyskretna struktura zgrubna na zbiorze przeliczalnym jest metryzowalna.

Dla przykładu pokażemy, że dyskretna struktura zgrubna  $\mathcal{E}$  dla  $\mathbb{N}$  jest metryzowalna. Określimy metrykę  $d$  na  $X$  taką, że  $\mathcal{E}$  będzie ograniczoną strukturą zgrubną odpowiadającą metryce  $d$ . Niech

$$d(x, x') = \begin{cases} \max(x, x') & \text{gdy } x \neq x' \\ 0 & \text{gdy } x = x'. \end{cases}$$

Aby wykazać, że  $d$  rzeczywiście jest metryką, wystarczy sprawdzić nierówność trójkąta.

Jako że  $\mathcal{E}$  jest ograniczoną strukturą zgrubną odpowiadającą metryce  $d$ , to

$$\mathcal{E} = \{E \subset X \times X : \exists M \in \mathbb{N} E \subset \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, M\} \cup \Delta_{\mathbb{N}}\}$$

Zatem elementy struktury zgrubnej  $\mathcal{E}$  zawierają poza przekątną tylko punkty z pewnego skończonego kwadratu, czyli, krótko mówiąc, zawierają tylko skończenie wiele punktów poza przekątną.

Zbadamy nieco dokładniej te struktury zgrubne, które mają mało generatorów.

DEFINICJA 1.21. Powiemy, że struktura zgrubna na  $X$  jest *monogeniczna*, gdy jest generowana przez tylko jeden podzbiór  $X \times X$ .

FAKT 1.22. Jeśli struktura zgrubna na  $X$  jest skończenie generowana, to jest monogeniczna.

*Dowód.* Załóżmy, że struktura zgrubna  $\mathcal{E}$  na  $X$  jest generowana przez zbiory  $E_1, \dots, E_n \subset X \times X$ . Niech  $\mathcal{E}'$  będzie strukturą zgrubną generowaną przez  $E = E_1 \cup \dots \cup E_n$ . Ponieważ  $\mathcal{E}$  jest zamknięta ze względu na branie skończonych sum, to  $E \in \mathcal{E}$ , czyli  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ . Z drugiej strony,  $\mathcal{E}'$  jest zamknięta ze względu na branie podzbiorów, więc  $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}'$ , bo  $E_1, \dots, E_n \subset E$ . Zatem zachodzi też  $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ . W związku z tym  $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ , czyli  $\mathcal{E}$  jest generowana przez  $E$ .  $\square$

Rzecz jasna, każda monogeniczna struktura zgrubna jest na mocy twierdzenia 1.17 metryzowalna. Nietrudno sprawdzić, że nie każda metryzowalna struktura zgrubna jest monogeniczna; za przykład może tu posłużyć dyskretna struktura zgrubna na zbiorze przeliczalnym.

Ponownie dokonamy przypomnienia kilku pojęć potrzebnych nam w dalszej części. Na potrzeby poniższych definicji, niech  $X$  i  $Y$  będą przestrzeniami zgrubnymi.

DEFINICJA 1.23. Zbiór  $B \subset X$  nazywamy (zgrubnie) *ograniczonym*, gdy zbiór  $B \times B$  jest kontrolowany.

DEFINICJA 1.24. Powiemy, że przekształcenie  $f: X \rightarrow Y$  jest *właściwe*, gdy przeciwobraz zbioru ograniczonego przy przekształceniu  $f$  jest ograniczony.

DEFINICJA 1.25. Powiemy, że przekształcenie  $f: X \rightarrow Y$  jest *bornologiczne*, gdy dla dowolnego zbioru kontrolowanego  $E \subset X \times X$ , zbiór  $(f \times f)(E)$  jest kontrolowanym podzbiorem  $Y \times Y$ .

DEFINICJA 1.26. Powiemy, że przekształcenie jest *zgrubne*, gdy jest ono właściwe i bornologiczne. Jeśli istnieją przekształcenia zgrubne  $f: X \rightarrow Y$  i  $g: Y \rightarrow X$  takie że  $f \circ g$  oraz  $g \circ f$  są bliskie identyczności (odpowiednio na  $X$  i na  $Y$ ), to przestrzenie  $X$  i  $Y$  nazywamy *zgrubnie równoważnymi*.

TWIERDZENIE 1.27. Struktura zgrubna na  $X$  jest monogeniczna wtedy i tylko wtedy, gdy  $X$  jest zgrubnie równoważna geodezyjnej przestrzeni metrycznej.

*Dowód.* Zważmy wpierw, że własność bycia przestrzenią monogeniczną jest zachowywana przez zgrubną równoważność przestrzeni. Jeśli teraz  $(X, d)$  jest geodezyjną przestrzenią metryczną, to dla każdych dwóch różnych punktów  $x', x''$  z  $X$  istnieje skończony ciąg punktów

$$x' = x_0, x_1, x_2, \dots, x_m = x'',$$

taki że  $d(x_i, x_{i+1}) \leq 1$  dla każdego  $i$  oraz  $m \leq d(x', x'') + 1$ . W związku z tym zgrubna struktura na  $X$  jest generowana przez zbiór  $E = \{(x, y) : d(x, y) \leq 1\}$ , a zatem jest monogeniczna.

Teraz założmy przeciwnie, że na  $X$  dana jest monogeniczna struktura zgrubna  $\mathcal{E}$ , generowana przez  $E \subset X \times X$ . Skonstruujemy graf  $G$  następująco: wierzchołkami  $G$  będą punkty z  $X$ , zaś dwa różne wierzchołki  $x$  i  $y$  będą połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy  $(x, y) \in E$ . (Punktami w  $G$  nie są tylko wierzchołki, ale także *wszystkie* punkty z krawędzi.) Nadajmy każdej krawędzi długość 1 i wprowadźmy na  $G$  metrykę najkrótszej drogi oraz ograniczoną strukturę zgrubną odpowiadającą tej metryce.

Wówczas  $G$  jest zupełną przestrzenią geodezyjną. (Każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest od pewnego miejsca stały.) Zdefiniujmy przekształcenie  $f: X \rightarrow G$  tak, że obrazem punktu z  $X$  jest odpowiadający mu wierzchołek grafu. Ponieważ  $f$  przekształca zbiór  $E$  w zbiór punktów w  $G \times G$  oddalonych nie dalej niż 1 od przekątnej  $\Delta_G$ , to  $f$  jest przekształceniem zgrubnym.

Podobnie, zdefiniujmy przekształcenie  $g: G \rightarrow X$  tak, że obrazem punktu  $g \in G$  jest punkt z  $X$  odpowiadający temu wierzchołkowi grafu  $G$ , który leży najbliżej punktu  $g$ . Punktom z  $G$  leżącym pośrodku krawędzi łączącej dwa wierzchołki przyporządkujmy dowolny z nich. Wówczas  $g$  jest przekształceniem zgrubnym, a ponadto złożenia  $f \circ g$  oraz  $g \circ f$  są bliskie identyczności, zatem  $X$  i  $G$  są zgrubnie równoważne.  $\square$

Z uwagi na tę równoważność, monogeniczne przestrzenie zgrubne bywają nazywane *zgrubnie geodezyjnymi*.

## 2 Hiperbolizacja przestrzeni metrycznych

Rozważmy dowolną przestrzeń metryczną. Każda kula w tej przestrzeni jest charakteryzowana przez jej środek i promień. Prowadzi to w naturalny sposób do poniższej definicji:

DEFINICJA 2.1. Niech  $X$  będzie przestrzenią metryczną. Wówczas przestrzeń  $\mathcal{H}(X) = X \times \mathbb{R}^+$  nazywamy *przestrzenią kul* w  $X$ .

Chcielibyśmy określić strukturę zgrubną na  $\mathcal{H}(X)$ . Intuicyjnie można powiedzieć, że kule są bliskie, gdy ich przecięcie stanowi istotną część każdej z nich. Wówczas kule powinny mieć zbliżoną wielkość, a więc i zbliżone promienie, oraz odległość między ich środkami nie powinna zbyt duża w porównaniu z ich promieniami.

DEFINICJA 2.2. Przestrzeń kul  $\mathcal{H}(X)$  wraz ze strukturą zgrubną generowaną przez zbiór

$$E = \left\{ ((x, t), (x', t')) \in \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) : \frac{1}{2} \leq \frac{t}{t'} \leq 2, d(x, x') \leq \frac{1}{2} \min(t, t') \right\}.$$

nazywamy *przestrzenią hiperboliczną* nad  $X$ .

Na mocy twierdzenia 1.17, struktura zgrubna na  $\mathcal{H}(X)$  jest metryzowalna. Analiza dowodu tego twierdzenia pozwala w sposób konstruktywny wskazać metrykę na  $\mathcal{H}(X)$ , wyznaczającą rozważaną strukturę zgrubną.

Metryka konstruowana w dowodzie twierdzenia 1.17 okazuje się jednak bardzo niewygodna w użyciu, dlatego pokażemy, że struktura zgrubna na  $\mathcal{H}(X)$  jest ograniczoną strukturą zgrubną dla pewnej innej metryki, jej równoważnej.

Dla punktów  $z = (x, t)$  oraz  $z' = (x', t')$  z  $\mathcal{H}(X)$ , określimy metrykę  $\rho$  następująco:

$$\rho(z, z') = \log \left( \frac{d(x, x') + \max(t, t')}{\sqrt{tt'}} \right).$$

Należy sprawdzić, że  $\rho$  rzeczywiście jest metryką. Symetria nie wymaga komentarza. Ponieważ

$$\frac{d(x, x') + \max(t, t')}{\sqrt{tt'}} \geq \frac{\max(t, t')}{\sqrt{tt'}} \geq \frac{\max(t, t')}{\sqrt{\max(t, t')^2}} = \frac{\max(t, t')}{\max(t, t')} = 1,$$

to  $\rho$  przyjmuje wartości nieujemne, ponadto wartość ułamka pod logarytmem jest równa 1 wtedy i tylko wtedy, gdy  $d(x, x') = 0$  oraz  $t = \max(t, t') = t'$ , czyli gdy  $z = z'$ .

Pozostała do sprawdzenia nierówność trójkąta. Rozważmy trzy punkty z przestrzeni  $\mathcal{H}(X)$ , mianowicie  $z = (x, t)$ ,  $z' = (x', t')$ ,  $z'' = (x'', t'')$ . Ponieważ suma logarytmów dwóch liczb równa jest logarytmowi ich iloczynu, to wystarczy sprawdzić, że

$$\frac{d(x, x'') + \max(t, t'')}{\sqrt{tt''}} \leq \frac{d(x, x') + \max(t, t')}{\sqrt{tt'}} \cdot \frac{d(x', x'') + \max(t', t'')}{\sqrt{t't''}},$$

$$\text{czyli że } t' \cdot (d(x, x'') + \max(t, t'')) \leq (d(x, x') + \max(t, t')) (d(x', x'') + \max(t', t'')).$$

Tą ostatnią nierówność łatwo zaś pokazać, korzystając z faktu że

$$t' \cdot \max(t, t'') \leq \max(t, t') \cdot \max(t', t'')$$

$$\text{oraz } t' \cdot d(x, x'') \leq t' (d(x, x') + d(x', x'')) \leq \max(t', t'') \cdot d(x, x') + \max(t, t') \cdot d(x', x'').$$

FAKT 2.3. Struktura zgrubna przestrzeni hiperbolicznej jest ograniczoną strukturą zgrubną odpowiadającą metryce  $\rho$ .

*Dowód.* Wystarczy pokazać, że istnieją dodatnie stałe  $\alpha, \beta$  takie, że

1. jeśli  $(z, z') \in E$ , to  $\rho(z, z') \leq \alpha$
2. jeśli  $\rho(z, z') \leq \beta$ , to  $(z, z') \in E$ .

Jeśli  $(z, z') \in E$ , to

$$\begin{aligned} \rho(z, z') &= \log \left( \frac{d(x, x') + \max(t, t')}{\sqrt{tt'}} \right) \leq \log \left( \frac{\min(t, t')/2 + \max(t, t')}{\sqrt{\min(t, t') \max(t, t')}} \right) \\ &= \log \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\min(t, t')}{\max(t, t')}} + \sqrt{\frac{\max(t, t')}{\min(t, t')}} \right) \leq \log \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} + 1 \right) = \log(\sqrt{2} + 1) = \alpha. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, jeśli  $\rho(z, z') \leq \log \frac{4}{3} = \beta$ , to

$$\frac{d(x, x') + \max(t, t')}{\sqrt{tt'}} \leq \frac{4}{3}, \text{ a więc } \frac{\max(t, t')}{\sqrt{tt'}} \leq \frac{4}{3}$$

skąd mamy  $(\frac{3}{4})^2 \leq t/t' \leq (\frac{4}{3})^2$ , a więc  $\frac{1}{2} \leq t/t' \leq 2$ . Ponadto

$$\frac{d(x, x') + \max(t, t')}{\sqrt{tt'}} \geq \frac{d(x, x')}{\sqrt{tt'}} + 1,$$

a więc  $d(x, x')/\sqrt{tt'} \leq \frac{1}{3}$ , skąd otrzymujemy  $d(x, x')/\min(t, t') \leq \frac{1}{3}\sqrt{2} \leq \frac{1}{2}$ . □