Zadania z RP2 - 6

1. Liczba studentów przyjętych na pierwszy rok jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem 100. Jeśli ta liczba przekroczy 120, tworzy się 2 grupy wykładowe. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo (korzystając z CTG), że nie trzeba będzie tworzyć dwóch grup.

2. Dany jest ciąg $X_1,\ X_2,\ \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie: $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 2) = 1/4$, $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{4\sqrt{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) - 7n}{n + (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2}.$$

3. Rzucamy 400 razy symetryczną monetą. Jakie jest (przybliżone) prawdopodobieństwo tego, że liczba orłów

a) jest większa niż 220?

b) należy do przedziału $[180, 210]$?

4. Rzucamy symetryczną kostką aż suma oczek przekroczy 350. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że rzucimy więcej niż 120 razy?

5. Zmienne losowe $X_1,\ X_2,\ \ldots$ są niezależne i mają ten sam rozkład taki, że $P(X_i = a) = P(X_i = 1/a) = \frac{1}{2}$ $(a > 0)$. Zbadać zbieżność według rozkładu zmiennych losowych $Z_n = (X_1 X_2 \ldots X_n)^{1/\sqrt{n}}$.

6. Dane są dwa ciągi (X_n), (Y_n) niezależnych zmiennych losowych, przy czym zmienne (X_n) mają ten sam rozkład wykładniczy z parametrem 1, a (Y_n) mają rozkład Poissona z parametrem n. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2 - Y_n^2}{n\sqrt{n}}.$$

7. Zmienna losowa X ma skończony drugi moment oraz spełnia następujący warunek: jeśli Y, Z są niezależnymi kopiami X, to X ma ten sam rozkład, co $\frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$. Wykazać, że X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.