Zadania z RP2 - 7

1. Dla dwóch rozkładów μ, ν na $\mathbb{R}$ o dystrybuantach F_μ, F_ν, odpowiednio, definiujemy

$$d(\mu,\nu) = \inf\{\varepsilon > 0 : \forall_{x\in\mathbb{R}} F_\nu(x-\varepsilon) - \varepsilon \leq F_\mu(x) \leq F_\nu(x+\varepsilon) + \varepsilon\}.$$

Udowodnić, że d jest metryką na zbiorze miar probabilistycznych na $\mathbb{R}$ oraz że ciąg (μ_n) jest słabo zbieżny do μ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(\mu_n,\mu) \to 0$.

2. Niech dla $n \geq 1$, $X_{1,n}$, $X_{2,n}$, $\ldots$, $X_{r_n,n}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że dla pewnego $\delta > 0$ mamy $\mathbb{E}|X_{n,k}|^{2+\delta} < \infty$ dla wszystkich n, k oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}|X_{k,n} - \mathbb{E}X_{k,n}|^{2+\delta} = 0.$$

Udowodnić, że jest spełniony warunek Lindeberga.

3. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym $\mathbb{P}(X_k = k) = \mathbb{P}(X_k = -k) = 1/2$. Niech $s_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var} X_k$. Czy ciąg zmiennych losowych

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{s_n}$$

jest zbieżny według rozkładu, a jeśli tak, to do jakiej granicy?

4. Niech X_1, X_2, $\ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych spełniających warunki

$$|X_n| \leq K \text{ p.n.}, \quad \sum_{k=1}^n \mathrm{Var} X_k \to \infty.$$

Udowodnić, że warunek Lindeberga jest spełniony.

5. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych takich, że

$$P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n^2}), \quad P(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}.$$

Udowodnić, że

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow N(0,1),$$

mimo, iż $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var} X_n = 2$.

6. Dla $n \geq 1$, zmienne $(X_{n,k})_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, są niezależne, i mają rozkład $\mathbb{P}(X_{n,k} = 1) = \frac{1}{2n} = 1 - \mathbb{P}(X_{n,k} = 0)$.

a) Wykazać, że warunek Lindeberga dla układu $(X_{n,k})_{n,k}$ nie jest spełniony.

b) Udowodnić, że ciąg $(X_{n,1} + X_{n,2} + \ldots + X_{n,n})_n$ jest zbieżny według rozkładu. Wyznaczyć rozkład graniczny.