Zadania z RP2 - 5

1. Dane są dwa ciągi (X_n), (Y_n), przy czym (X_n) zbiega według rozkładu do X, a (Y_n) zbiega według rozkładu do zmiennej Y stałej p.n.

a) Udowodnić, że $(X_n + Y_n)$ zbiega słabo do $X + Y$.

b) Udowodnić, że $(X_n Y_n)$ zbiega słabo do XY.

2. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, przy czym $\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathrm{Var}X_i = 1$. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny według rozkładu do zmiennej o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$.

3. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \ldots + \frac{n^n}{n!}\right).$$

4. Dana jest rodzina (X_α) zmiennych losowych taka, że dla pewnego $\delta > 0$ mamy $\sup_\alpha \mathbb{E}|X_\alpha|^\delta < \infty$. Dowieść, że rodzina rozkładów (μ_{X_α}) jest ciasna.

5. Dana jest rodzina rozkładów $(\mathcal{N}(m, \sigma^2))$, $m \in M$, $\sigma \in \Sigma$. Dowieść, że ta rodzina jest ciasna wtedy i tylko tedy, gdy zbiory M i Σ są ograniczone.

6. Dany jest ciąg (X_n) zmiennych losowych taki, że

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n}, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu $(\frac{X_n}{n^\alpha})$, gdzie α jest ustaloną liczbą rzeczywistą.