Zadania z RP2 - 11

1. Niech E będzie pewnym zbiorem przeliczalnym. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych oraz ciąg funkcyjny (f_n), $f_n : E \times \mathbb{R} \to E$. Definiujemy ciąg (Y_n) wzorem

$$Y_{n+1} = f(Y_n, X_n),\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdzie Y_0 jest pewną zmienną losową o wartościach w E. Dowieść, że (Y_n) jest łańcuchem Markowa.

2. Podać przykład takiego łańcucha Markowa (X_n) oraz takiej funkcji f, że $(f(X_n))$ nie jest łańcuchem Markowa.

3. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Rozstrzygnąć, które z podanych niżej procesów są łańcuchami Markowa:

$$U_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

$$Y_n = X_n \cdot X_{n+1},$$

$$Z_n = \frac{X_n + X_{n+1}}{2}.$$

4. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1)$, $p \in (0, 1)$. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnić, że ciągi

$$Y_n = |S_n|,\ Z_n = \max_{k \le n} S_k - S_n$$

są łańcuchami Markowa.

5. Rzucamy kostką tak długo, aż pojawi się ciąg 16 lub 66. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciąg 16 pojawi się wcześniej?

6. Rzucamy symetryczną monetą aż do momentu, gdy wyrzucimy serię 4 orłów. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby przeprowadzonych rzutów.

7. Macierz przejścia łańcucha Markowa $(X_n)_n$ na przestrzeni $E = \{1, 2, 3, 4\}$ dana jest następująco:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Jakie jest prawdopodobieństwo dojścia w dwóch krokach ze stanu 1 do stanu 2?

b) Zakładając, że $X_0 = 1$ p.n. obliczyć prawdopodobieństwo tego, że X_n będzie w stanie 2 przed stanem 4.

c) Zakładając, że $X_0 = 3$ p.n. obliczyć wartość oczekiwaną czasu dojścia do stanu 2.

d) Wyznaczyć rozkład stacjonarny. Czy łańcuch jest okresowy? Czy jest nieprzywiedlny?

8. Po wierzchołkach pięciokąta ABCDE porusza się pionek. W chwili początkowej znajduje się w punkcie A, a w każdym kolejnym ruchu przesuwa się w sposób niezależny od poprzednich ruchów z prawdopodobieństwem $1/2$ do jednego z sąsiednich wierzchołków. Obliczyć

a) prawdopodobieństwo, że pionek powróci do punktu A przed dotarciem do punktu C,

b) wartość oczekiwaną liczby ruchów, jakie wykona pionek przed powrotem do punktu A.

9. Naukowiec mający r parasoli wędruje między domem a biurem, zabierając ze sobą parasol (jeśli jest on pod ręką) wtedy, gdy pada (prawdopodobieństwo p), lecz nie przy bezdeszczowej pogodzie (prawdopodobieństwo $q = 1 - p$). Niech stanem łańcucha Markowa będzie liczba parasoli znajdujących się pod ręką, bez względu na to, czy naukowiec jest w domu, czy w miejscu pracy. Skonstruować macierz przejścia i znaleźć rozkład stacjonarny. Znaleźć przybliżone prawdopodobieństwo zmoknięcia naukowca w danym (odległym) dniu, a następnie wykazać, że 5 parasoli jest w stanie ochronić go w 5% przed zmoknięciem (dla dowolnego p).