Zadania z RP2 - 2

1. Niech dla $x \in \mathbb{R}$ δ_x oznacza miarę Diraca skoncentrowaną w punkcie x. Udowodnić, że ciąg (x_n) liczb rzeczywistych jest zbieżny do liczby x wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg miar (δ_{x_n}) zbiega słabo do miary δ_x.

2. Dany jest ciąg (X_n) zmiennych losowych zbieżny według rozkładu do zmiennej losowej X. Udowodnić, że ciąg $(\sin X_n)$ jest zbieżny według rozkładu do zmiennej $\sin X$.

3. Czy zmienne losowe posiadające gęstość mogą zbiegać według rozkładu do zmiennej o rozkładzie dyskretnym? Czy zmienne losowe o rozkładach dyskretnych mogą zbiegać do zmiennej o rozkładzie ciągłym?

4. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą zmiennymi losowymi, przy czym dla $n \geq 1$ rozkład zmiennej X_n określony jest następująco:

$$\mathbb{P}\left(X_n = \frac{j}{n}\right) = \frac{2j}{n(n+1)}, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Udowodnić, że ciąg (X_n) jest zbieżny według rozkładu. Wyznaczyć rozkład graniczny.

5. Niech $B(n,p)$ oznacza rozkład Bernoulliego o n próbach z prawdopodobieństwem sukcesu p, a $Poiss(\lambda)$ - rozkład Poissona z parametrem λ. Wykazać, że jeśli $np_n \to \lambda$, to $B(n,p) \Rightarrow Poiss(\lambda)$.

6. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ zbiegają według rozkładu do zmiennej X stałej p.n. Wykazać, że ciąg (X_n) zbiega do X według prawdopodobieństwa.

7. Niech g_n, g oznaczają odpowiednio gęstości rozkładów prawdopodobieństwa μ_n, μ na $\mathbb{R}^N$. Udowodnić, że jeśli $g_n \to g$ p.w., to $\mu_n \Rightarrow \mu$.

8. Niech S będzie przeliczalnym podzbiorem $\mathbb{R}^N$, zaś μ_n, μ - miarami probabilistycznymi skupionymi na S. Wykazać, że jeśli dla każdego $x \in S$ mamy $\mu_n(\{x\}) \to \mu(\{x\})$, to $\mu_n \Rightarrow \mu$.

9. Ciąg dystrybuant F_n zbiega punktowo do dystrybuanty ciągłej F. Wykazać, że zbieżność jest jednostajna.