Zadania z RP2 - 8

1. Niech $(X_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem zmiennych losowych przyjmujących wartości w przedziale $[0,1]$ z prawdopodobieństwem 1. Udowodnić, że jeśli dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy $\mathbb{E}X_n^k \to \frac{1}{k+1}$, to ciąg (X_n) jest zbieżny według rozkładu. Wyznaczyć rozkład graniczny.

2. Niech (X_n) będzie ciągiem dodatnich zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z gęstością

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp(-\frac{1}{2t}).$$

Niech (ε_n) będzie ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych. Podać konieczny i dostateczny warunek, aby ciąg

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_n^2 X_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

był zbieżny według rozkładu. Jaki jest rozkład graniczny?

3. Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[-1,1]$. Niech

$$\tau = \inf\{n : S_n \geq 0\}.$$

a) Udowodnić, że τ jest momentem zatrzymania.

b) Dowieść, że dla każdego $p > 0$ mamy $\mathbb{E}\tau^p < \infty$. Wywnioskować stąd, że $\tau < \infty$ p.n.

b) Wyznaczyć rozkład zmiennej S_τ.

4. Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0,1]$. Niech $\tau = \inf\{n : X_1 + X_2 + \ldots + X_n \geq 1\}$. Wyznaczyć $\mathbb{E}\tau$ oraz $\mathbb{E}S_\tau$.

5. Niech (X_n) będzie ci'agiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym całkowalnym rozkładzie, a τ będzie całkowalnym momentem zatrzymania. Udowodnić, że

$$\mathbb{E}S_\tau = \mathbb{E}\tau \cdot \mathbb{E}X_1.$$

6. Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$. Niech $\tau = \inf\{n : S_n = 1\}$. Dowieść, że $\mathbb{E}\tau = \infty$.

7. Niech $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$ będzie filtracją.

a) Udowodnić, że $\tau \equiv k$ jest momentem zatrzymania.

b) Udowodnić, że jeśli τ, η są momentami zatrzymania względem $\mathcal{F}$, to $\tau \wedge \eta = \min(\tau, \eta)$ oraz $\tau \vee \eta = \max(\tau, \eta)$ także są momentami zatrzymania względem $\mathcal{F}$.

c) Udowodnić, że jeśli (X_n) jest ciągiem zmiennych losowych o wartościach w $\mathbb{R}^N$, adaptowanych do $\mathcal{F}$ oraz B jest podzbiorem borelowskim $\mathbb{R}^N$, to

$$\tau = \inf\{n : X_n \in B\}$$

jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}$.