Zadania z RP2 - 9

1. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi, a $\mathcal{G}$ będzie σ-ciałem takim, że X jest niezależna względem $\mathcal{G}$, a Y jest mierzalna względem $\mathcal{G}$. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją borelowską. Udowodnić, że jeśli $\mathbb{E}|f(X,Y)| < \infty$, to

$$\mathbb{E}(f(X,Y)|\mathcal{G}) = \phi(Y),$$

gdzie $\phi(y) = \mathbb{E}(f(X,y))$.

2. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0,1]$, a Y ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Wyznaczyć $\mathbb{E}X^Y$.

3. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, przy czym $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$ i $\mathbb{E}X_1 = 0$. Niech τ będzie momentem zatrzymania względem naturalnej filtracji. Udowodnić, że $\mathbb{E}S_\tau^2 \leq \mathbb{E}X_1^2\mathbb{E}\tau$.

4. Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$. Niech $a, b > 0$ będą liczbami całkowitymi i

$$\tau_{-a,b} = \inf\{n : X_1 + X_2 + \ldots + X_n \in \{a, b\}\}.$$

Obliczyć $\mathbb{E}\tau$ oraz rozkład $X_{\tau_{a,b}}$.

5. Niech X_1, X_2, … będzie ciągiem niezależnych całkowalnych scentrowanych zmiennych losowych. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Udowodnić,że ciąg (S_n) tworzy martyngał względem $(\mathcal{F}_n)$.

6. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi takimi, że (X,Y) ma gęstość $g_{X,Y}$. Niech g_Y oznacza gęstość brzegową zmiennej Y. Określmy

$$g_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{g_{X,Y}(x,y)}{g_Y(y)} & \text{jeśli } g_Y(y) \neq 0, \\ 0 & \text{jeśli } g_Y(y) = 0. \end{cases}$$

Dowieść, że dla dowolnej borelowskiej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że $\mathbb{E}|f(X)| < \infty$ mamy $\mathbb{E}(f(X)|Y) = \Psi(Y)$, gdzie

$$\Psi(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g_{X|Y}(x|y)dx.$$

7. Niech X, Y niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0,1]$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(\min(X,Y)|\max(X,Y))$.