Zadania z RP - 15

1. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb nieujemnych zbieżnym do 0, a (X_n) takim ciągiem zmiennych losowych, że dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład geometryczny z parametrem p_n. Udowodnić, że jeśli $p_n/a_n \to \lambda > 0$, to $a_n X_n$ zbiega według rozkładu do zmiennej o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ.

2. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Cauchy'ego z parametrem $a > 0$, tzn. mających gęstość

$$g(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}.$$

Udowodnić, że ciąg zmiennych

$$Y_n = \frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

jest zbieżny według rozkładu do zmiennej $\frac{1}{T}$, gdzie T ma rozkład wykładniczy z pewnym parametrem.

3. Niech X_n, $n \geq 1$, będzie pierwszą współrzędną zmiennej losowej o rozkładzie jednostajnym na kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$. Udowodnić, że ciąg $(\sqrt{n} X_n)$ jest zbieżny według rozkładu do zmiennej o rozkładzie $N(0,1)$.

4. Dany są dwa ciągi zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots$, przy czym ciąg (X_n) zbiega według rozkładu do X, a (Y_n) zbiega według prawdopodobieństwa do Y. Wszystkie zmienne X_i, Y_j, $i, j = 1, 2, \ldots$ są niezależne. Udowodnić, że ciąg $(X_n + Y_n)$ zbiega według rozkładu do $X + Y$.

5. Jakie warunki musi spełniać zbiór A, aby rodzina rozkładów

a) jednostajnych na odcinku $[-a, a]$, $a \in A \subseteq (0, \infty)$,

b) wykładniczych z parametrem λ, $\lambda \in A \subseteq (0, \infty)$,

c) Bernoulliego z parametrami n, p, $(n, p) \in A \subseteq \mathbb{N} \times [0,1]$,

była ciasna?

6. Dane są dwa ciągi zmiennych losowych (X_n), (Y_n), zbieżne według rozkładu do zmiennych X, Y, odpowiednio. Dla każdego n zmienne X_n, Y_n są niezależne. Udowodnić, że ciąg dwuwymiarowych zmiennych losowych (X_n, Y_n) zbiega według rozkładu do (X, Y).

7. Udowodnić, że jeśli ciąg (X_n) jest zbieżny według rozkładu do zmiennej X oraz dla pewnych p, $\varepsilon > 0$ mamy $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^{p+\varepsilon} < \infty$, to

$$\mathbb{E}|X|^p < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|^p = \mathbb{E}|X|^p, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n^p = \mathbb{E}X^p.$$