Zadania z RP2 - 10

1. Niech X_1, X_2, ... będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathbb{P}(X_k = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnić, że

a) $(S_n^2 - n)$ jest martyngałem.

b) $(\exp(\lambda S_n - \lambda^2 n/2))$ jest nadmartyngałem.

c) nadmartyngał z punktu b) jest zbieżny p.n. Czy jest on zbieżny w L^1?

2. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o średniej 1. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ oraz $Y_n = X_1 X_2 \ldots X_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnić, że

a) (Y_n) jest martyngałem względem $(\mathcal{F}_n)$.

b) jeśli zmienne (X_n) mają ten sam nieujemny rozkład nieskoncentrowany w 1, to $Y_n \to 0$ p.n.. Czy ma miejsce zbieżność w L^1? A w L^2?

3. Dany jest ciąg (X_n) zmiennych losowych adaptowanych do filtracji $(\mathcal{F}_n)$ taki, że $X_0 = 0$ p.n. Udowodnić, że ciąg ten jest martyngałem względem $(\mathcal{F}_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbb{E}X_\tau = 0$$

dla dowolnego ograniczonego momentu zatrzymania τ.

4. Niech $p \in (0, 1)$, $p \neq 1/2$, i niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1)$, $n = 1, 2, \ldots$.

a) Udowodnić, że ciąg

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}, \qquad \text{gdzie} \qquad S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

jest martyngałem.

b) Niech

$$\tau_{a,b} = \inf\{n : S_n \in \{-a, b\}\}.$$

Wyznaczyć rozkład zmiennej S_τ oraz $\mathbb{E}\tau$.

5. Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathbb{P}(X_n = \pm 1) = 1/2$. Udowodnić, że jeśli τ jest całkowalnym momentem zatrzymania względem naturalnej filtracji generowanej przez ten ciąg, to $\mathbb{E}S_\tau^2 = \mathbb{E}\tau$ oraz $\mathbb{E}S_\tau = 0$.

6. W pojemniku znajduje się m cząstek. W każdej sekundzie każda z cząstek, niezależnie od pozostałych, może albo zniknąć z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$, albo podzielić się na trzy cząstki z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem jeden, po pewnym czasie nie będzie w pojemniku ani jednej cząstki. Obliczyć średni czas oczekiwania na zniknięcie wszystkich cząstek z pojemnika.

7. Załóżmy, że (X_n) jest martyngałem. Rozstrzygnąć, czy są (nad- ,pod-) martyngałami procesy

$$\text{a) } (|X_n|^p),\ p \geq 1, \qquad \text{b)}(X_n \wedge a),\ a \in \mathbb{R}.$$

8. Załóżmy, że ciąg (X_n) jest podmartyngałem. Czy ciąg $(|X_n|)$ jest podmartyngałem?