

## Zadania z RP2 - 1

**1.** Rozstrzygnąć, czy podane niżej funkcje są funkcjami charakterystycznymi i jeśli tak, podać odpowiedni rozkład.

a)  $\cos t$ ,      b)  $\cos^2 t$ ,      c)  $\frac{1}{4}(1+e^{it})^2$ ,      d)  $\frac{1+\cos t}{2}$ ,      e)  $(2-e^{it})^{-1}$ .

**2.** Niech  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  będą funkcjami charakterystycznymi pewnych rozkładów. Udowodnić, iż dowolna kombinacja wypukła tych funkcji jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu.

**3.** Dany jest ciąg  $(X_n)$  niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Zmienna losowa  $N$  jest od nich niezależna i ma rozkład Poissona z parametrem  $\lambda$ . Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej  $X_1 + X_2 + \dots + X_N$ .

**4.** Niech  $\phi$  będzie funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu. Rozstrzygnąć, czy

a)  $\phi^2$ ,      b)  $\operatorname{Re}\phi$ ,      c)  $|\phi|^2$ ,      d)  $|\phi|$

są funkcjami charakterystycznymi.

**5.** Zmienne  $X, Y$  są niezależne, przy czym  $X$  oraz  $X + Y$  mają rozkłady normalne. Udowodnić, że  $Y$  ma rozkład normalny lub jest stała p.n..

**6.** Zmienne losowe  $X, Y$  są niezależne, przy czym  $X$  ma rozkład jednostajny  $U(0, 1)$ , a  $Y$  ma rozkład zadany przez

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Wyznaczyć rozkład zmiennej  $X + Y$ .

**7.** Zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots, X_n$  są niezależne i mają ten sam rozkład, przy czym zmienna  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  ma rozkład normalny  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Wyznaczyć rozkład zmiennych  $X_i$ .

**8.** Zmienna losowa  $X$  ma rozkład jednostajny  $U(-1, 1)$ . Czy istnieje niezależna od niej zmienna  $Y$  taka, że rozkłady zmiennych  $X + Y$  oraz  $\frac{1}{2}Y$  są takie same?

**9.** Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej  $X$  ma drugą pochodną w zerze. Udowodnić, że  $\mathbb{E}X^2 < \infty$ .