Zadania z RP2 - 4

1. Zmienne losowe $N,\ X_1,\ X_2,\ \ldots$ są niezależne, przy czym N ma rozkład geometryczny z parametrem p, a zmienne X_i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k.$$

2. Zmienne $X,\ Y$ są niezależne, przy czym X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0,1]$, a Y ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej $X \cdot Y$.

3. Dane są trzy ciągi (X_n), (Y_n), (Z_n) zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienne $X_n,\ Y_n$ oraz Z_n są niezależne, zmienna X_n ma rozkład Poissona z parametrem n, zmienna Y_n ma rozkład normalny o średniej $\sqrt{n}$ i wariancji n, natomiast zmienna Z_n ma rozkład Bernoulliego z parametrami $n,\ \frac{1}{n}$. Wykazać, że ciąg

$$T_n = \frac{X_n}{n} + \frac{Y_n}{2\sqrt{n}} + Z_n$$

jest zbieżny według rozkładu i wyznaczyć rozkład graniczny.

4. Zmienne $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots$ są niezależne, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna ε_n ma rozkład zadany następująco:

$$\mathbb{P}(\varepsilon_n = 0) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}.$$

Wykazać, że zmienna $X = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ ma rozkład jednostajny na odcinku $[0,1]$.

5. Rzucamy monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi p, aż do momentu, gdy wypadną 2 orły (łącznie, niekoniecznie pod rząd). Niech X_p oznacza liczbę rzutów. Zbadać zachowanie się ciągu $2pX_p$, gdy $p \to 0$.

6. Niech $X_1,\ X_2,\ \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[-1,1]$. Zdefiniujmy

$$Y_n = \frac{\mathrm{sgn} X_n}{|X_n|^{1/\alpha}}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

gdzie α jest ustaloną liczbą z przedziału $(0,2)$. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}{n^{1/\alpha}}$$

jest zbieżny według rozkładu i wyznaczyć funkcję charakterystyczną rozkładu granicznego.