

### Zadania domowe z RP2. Seria 2.

**1.** Niech  $(X_n)$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie  $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Niech

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

a) (1 p.) Udowodnić, że  $(S_n^3 - 3nS_n)$  jest martyngałem względem filtracji  $(\mathcal{F}_n)$ .

b) (2 p.) Niech  $a, b$  będą dodatnimi liczbami całkowitymi i

$$\tau = \inf\{n : S_n \in \{-a, b\}\}.$$

Wyznaczyć  $\mathbb{E}\tau S_\tau$ .

**2.** Niech  $(X_n)$  będzie łańcuchem Markowa o przestrzeni stanów  $\{1, 2, 3\}$  i o macierzy przejścia

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

a) (0.5 p) Czy  $(X_n)$  jest nieprzywiedlny? Czy jest okresowy?

b) (0.5 p) Wyznaczyć rozkład stacjonarny.

c) (1 p) Załóżmy, że  $X_1 = 1$  p.n.. Wyznaczyć średni czas oczekiwania na dojście do stanu 3.