Zadania domowe z RP2. Seria 1.

1. Ciąg $(X_n)_n$ jest zbieżny według rozkładu do zmiennej losowej X o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[-a, a]$. Rozstrzygnąć, czy ciąg $(\frac{1}{X_n})_n$ zbiega według rozkładu do $\frac{1}{X}$.

2. Niech p będzie ustaloną liczbą dodatnią. Dany jest ciąg $(X_n)_n$ zmiennych losowych o rozkładzie zadanym następująco: dla $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{k^p}{S_p(n)}, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots, n,$$

gdzie

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \ldots + n^p.$$

Udowodnić, że ciąg $(\frac{X_n}{n})_n$ jest zbieżny według rozkładu i wyznaczyć rozkład graniczny.

3. Dane są dwa ciągi $(X_n)_n$, $(Y_n)_n$ niezależnych zmiennych losowych takich, że dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład normalny o średniej 0 i wariancji $\frac{1}{n}$, a zmienna Y_n ma rozkład z gęstością $g(x) = 3x^2 \cdot 1_{[0,1]}(x)$. Udowodnić, że ciąg $(\sqrt[3]{n}(X_n + \min_{k \leq n} Y_k))_n$ jest zbieżny według rozkładu i wyznaczyć rozkład graniczny.

4. Zmienne X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2 są niezależne, przy czym X_1, X_2, X_3, X_4 mają ten sam rozkład, a Y_1, Y_2 mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Ponadto, $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ ma ten sam rozkład, co $Y_1 + Y_2$. Udowodnić, że $X_1 + X_2$ ma rozkład wykładniczy z parametrem 1.

5. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o tej własności, że funkcja

$$\phi(t) = e^{if(t)}$$

jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu na $\mathbb{R}$.