

Zadania z RP1 - 14

1. Dana jest funkcja $G : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ taka, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(t)}{t} = \infty$. Załóżmy, że $(X_i)_{i \in I}$ jest rodziną zmiennych losowych takich, że $\sup_i \mathbb{E}G(|X_i|) < \infty$. Udowodnić, że rodzina ta jest jednostajnie całkowalna.

2. Podać warunek na zbiór Λ , aby rodzina zmiennych losowych była jednostajnie całkowalna:

a) $(X_i)_{i \in \Lambda}$, $X_i \sim \text{Exp}(i)$, $\Lambda \subset (0, \infty)$.

b) $(X_i)_{i \in \Lambda}$, $X_i \sim \text{Pois}(i)$, $\Lambda \subset (0, \infty)$.

c) $(X_{a,b})_{(a,b) \in \Lambda}$, $X_{a,b} \sim \mathcal{U}(a, b)$.

3. Dany jest ciąg zmiennych losowych (X_n) , gdzie $X_n \sim \text{Exp}(\lambda_n)$. Udowodnić, że (X_n) jest zbieżny w L^1 wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny w L^p .

4. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych.

a) Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n}{n}$$

jest albo zbieżny p.n., albo rozbieżny p.n.

b) Załóżmy, że podany ciąg jest zbieżny p.n.. Udowodnić, że jego granica jest stała p.n.

5. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrem

2. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1X_2 + X_2X_3 + \dots + X_nX_{n+1}}{n + 2009}$$

jest zbieżny p.n. i wyznaczyć jego granicę.

6. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $(1/n, 1]$. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

jest zbieżny p.n. i wyznaczyć jego granicę.

7. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych nieujemnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie.

Udowodnić, że jeśli $\mathbb{E}X_1 = \infty$, to

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \infty$$

prawie na pewno.

8. Dany jest ciąg (A_n) niezależnych zdarzeń, $p_n = \mathbb{P}(A_n)$. Udowodnić, że

$$\frac{1_{A_1} + 1_{A_2} + \dots + 1_{A_n}}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n} \rightarrow 0$$

według prawdpodobieństwa.