

Zadania z RP1 - 8

1. Zmienna losowa X ma ten sam rozkład co e^{X-1} . Udowodnić, że $\mathbb{P}(X = 1) = 1$.
2. Niech Θ będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 2\pi]$.
- a) Udowodnić, że $\tan \Theta$ oraz $\tan(2\Theta)$ mają ten sam rozkład. Co to za rozkład?
- b) Udowodnić, że jeśli X, Y są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$, niezależnymi od Θ , to $\frac{X}{Y}$ oraz $\tan \Theta$ mają ten sam rozkład.

3. Zmienne losowe X, Y_1, Y_2, \dots, Y_n są niezależne, przy czym X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, a Y_k ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Udowodnić, że zmienna X ma ten sam rozkład co

$$X^{1/2^n} 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}} |Y_1| |Y_2|^{1/2} |Y_3|^{1/4} \dots |Y_n|^{1/2^{n-1}}.$$

4. Niech $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx$, $r > 0$. Mówimy, że zmienna X ma rozkład *gamma* z parametrami λ, r (ozn. $\Gamma(\lambda, r)$), jeśli ma gęstość

$$g_{\lambda, r}(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x} 1_{[0, \infty)}(x).$$

a) Udowodnić, że jeśli X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi, $X \sim \Gamma(\lambda, r)$, $Y \sim \Gamma(\lambda, s)$, to $X + Y \sim \Gamma(\lambda, r + s)$.

b) Udowodnić, że jeśli X_1, X_2, \dots, X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\text{Exp}(\lambda)$, to $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ma rozkład $\Gamma(\lambda, n)$.

c) Udowodnić, że jeśli X_1, X_2, \dots, X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$, to $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ ma rozkład $\Gamma(1/2, n/2)$ (jest to tzw. rozkład *chi kwadrat o n stopniach swobody*).

5. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na kwadracie $\{(x, y) : |x| + |y| = \sqrt{2}\}$.

a) Obliczyć kowariancję X i Y . Czy zmienne X, Y są niezależne?

b) Obliczyć $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

c) Wyznaczyć rozkład X oraz rozkład Y .

d) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$.

e) Udowodnić, że zmienne $X + Y$ oraz $X - Y$ są niezależne.

6. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Udowodnić, że zmienne X/Y oraz $X + Y$ są niezależne.