Zadania z RP1 - 4

1. Z odcinka $[0,1]$ losujemy przeliczalnie wiele punktów. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 w każdym otwartym podprzedziale tego odcinka znajdzie się co najmniej jeden punkt.

2. Rodzina $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ zdarzeń generuje σ-ciało $\mathcal{F}$. Wiadomo, że dla pewnych miar μ, ν zachodzi $\mu(A_i) = \nu(A_i)$ dla wszystkich i.
a) Czy wynika stąd, że $\mu = \nu$?
b) Co jeśli założymy, że $\mathcal{A}$ jest π-układem?

3. Z przedziału $[0,1]$ losujemy kolejno liczby a_1, a_2, ... Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że ciąg (a_n) jest rosnący od pewnego miejsca.

4. Dane są miary probabilistyczne μ na $\mathbb{R}$, ν na $\mathbb{R}^2$ takie, że dla dowolnych s, t,

$$\mu((-\infty,s])\mu([t,\infty)) = \nu((-\infty,s]\times[t,\infty)).$$

Udowodnić, że $\nu = \mu\otimes\mu$.

5. Zdarzenia A_1, A_2, ... mają prawdopodobieństwo 1. Udowodnić, że $\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$. Co jeśli rodzina $\{A_i\}$ jest nieprzeliczalna?

6. σ-ciała $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ... są niezależne. Niech $A_i \in \mathcal{F}_i$, $i = 1, 2, \ldots$.
a) Udowodnić, że jeśli dla pewnego n, $\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = 1$, to $\mathbb{P}(A_k) = 1$ dla pewnego $k \le n$.
b) Czy analogiczne stwierdzenie ma miejsce, gdy $\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = 1$?

7. Niech $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną dla schematu Bernoulliego $B(n,p)$. Niech dla pewnego $k\in\{0,1,\ldots,n\}$, $A_k = \{\text{liczba sukcesów wynosi } k\}$. Udowodnić, że prawdopodobieństwo warunkowe $\mathbb{P}(\cdot|A_k)$ nie zależy od p.