

Zadania z RP1 - 15

1. a) Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie takim, że $X_i \in L^p$ dla pewnego $p > 1$. Udowodnić, że

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}X_1$$

w L^1 .

b) Udowodnić powyższe bez założenia o dodatkowej całkowalności ciągu (X_n) .

2. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład wykładniczy z parametrem n . Zbadać zbieżność ciągu

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

w sensie zbieżności p.n.

3. Zmienne losowe X_1, X_2, \dots są niezależne, przy czym dla $n \geq 1$ rozkład X_n zadany jest następująco:

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1/2, \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/2 - \frac{1}{4n^2}, \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{4n^2}.$$

Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

jest zbieżny prawie na pewno i wyznaczyć jego granicę.

4. Dany jest ciąg (N_n) niezależnych zmiennych losowych takich, że dla $n \geq 1$ zmienna N_n ma rozkład Poissona z parametrem n . Udowodnić, że (N_n/n) jest zbieżny w L^1 .

5. Dany jest ciąg (ε_n) niezależnych zmiennych Rademachera. Udowodnić, że dla $p > 1/2$ ciąg

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{n^p}, \quad n = 1, 2, \dots$$

jest zbieżny p.n. Co dla $p = 1/2$?

6. Dany jest ciąg Z_1, Z_2, \dots niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie: Z_i ma rozkład jednostajny na kole o środku w $(0, 0)$ i promieniu 1.

a) Udowodnić, że ciąg

$$\frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

jest zbieżny p.n. i wyznaczyć granicę.

b) Udowodnić, że ciąg

$$\frac{\|Z_1\| + \|Z_2\| + \dots + \|Z_n\|}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

jest zbieżny p.n. i wyznaczyć granicę.