Zadania z RP1 - 9

1. Zmienna losowa X jest skoncentrowana na zbiorze liczb nieujemnych, $p \in (1, \infty)$. Udowodnić, że

$$\mathbb{E}X^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(X \geq t)dt = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(X > t)dt.$$

2. Dana jest zmienna losowa X taka, że $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X = -3) = \frac{1}{2}$. Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}\frac{1}{X+2}$, $\mathbb{E}\cos(\pi X)$.

3. Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem 2. Obliczyć $\mathbb{E}6^X$.

4. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{3}{8}x^2 1_{[0,2]}(x).$$

Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}\frac{1}{1+x^3}$, $\mathbb{E}e^X$.

5. Na klasówce jest 5 zadań. Każdy z 30 uczniów rozwiąże każde z zadań z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Niech X oznacza liczbę uczniów, którzy rozwiążą co najmniej 4 zadania. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

6. W urnie znajduje się 50 białych kul. Losujemy ze zwracaniem po jednej kuli, przy czym wyciągniętą kulę malujemy na czerwono, jeśli jest biała. Niech X oznacza liczbę czerwonych kul w urnie po 20 losowaniach. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

7. Każdy bok i każdą przekątną sześciokąta foremnego malujemy losowo na jeden z trzech kolorów. Wybór każdego koloru jest jednakowo prawdopodobny, kolorowania różnych odcinków są niezależne. Niech X oznacza liczbę jednobarwnych trójkątów o wierzchołkach będących wierzchołkami sześciokąta. Obliczyć $\mathbb{E}X$.

8. Urna zawiera N kul, wśród których jest b kul białych. Losujemy bez zwracania n kul $(n \leq N)$ i definiujemy X jako liczbę kul białych wśród wylosowanych kul. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

9. Zmienna losowa X ma rozkład z dystrybuantą

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < 0, \\ t/2 & \text{jeśli } 0 \leq t < 1, \\ 3/4 & \text{jeśli } 1 \leq t < 5, \\ 1 \text{jeśli } t \geq 5. \end{cases}$$

Wyznaczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}2^X$.