

## Zadania z RP1 - 11

1. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład normalny w  $\mathbb{R}^d$ , o średniej  $m$  i macierzy kowariancji  $\Lambda$ . Niech  $T$  będzie przekształceniem afinicznym  $\mathbb{R}^d$  na  $\mathbb{R}^k$ ,  $k \leq d$ . Udowodnić, że  $TX$  ma rozkład normalny w  $\mathbb{R}^k$ . Wyznaczyć jego średnią oraz macierz kowariancji.

2. . Zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2xy + 3y^2}{2}\right).$$

Wyznaczyć macierz kowariancji wektora  $(X, Y)$  oraz rozstrzygnąć, czy zmienne  $X + Y$ ,  $X - Y$  są niezależne.

3. Niech  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), |\cdot|)$ ,  $X(\omega) = \omega^2$  dla  $\omega \in [0, 1]$  i niech  $\mathcal{G}$  będzie  $\sigma$ -ciałem generowanym przez zbiory  $[0, 1/3]$  i  $[0, 1/2]$ . Wyznaczyć  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ .

4. Zmienne losowe  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  są niezależne i mają ten sam rozkład  $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = 1/2$ . Wyznaczyć  $\mathbb{E}(\varepsilon_1|\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ .

5. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wyznaczyć  $\mathbb{E}(X|[X])$ .

6. W urnie znajdują się cztery kule ponumerowane od 1 do 4. Rzucamy kostką, a następnie losujemy ze zwracaniem tyle razy po jednej kuli z urny, ile oczek wypadło na kostce. Niech  $X$  - liczba wyrzuconych oczek,  $Y$  - liczba wyciągniętych kul z numerem 3. Obliczyć  $\mathbb{E}(Y|X)$  oraz  $\mathbb{E}(X|Y)$ .

7. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład Poissona z parametrem 1. Wyznaczyć  $\mathbb{E}(X|\max(X, 2))$ .

8. Zmienne  $X_1, X_2, \dots, X_n$  są niezależne i mają ten sam rozkład o skończonym pierwszym momencie. Wyznaczyć

$$\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2 + \dots + X_n).$$