Zadania z RP1 - 5

1. W urnie znajduje się jedna czarna kula. Wykonujemy nieskończony ciąg losowań. W każdym losowaniu ciągniemy kulę z urny, oglądamy ją, wrzucamy z powrotem oraz dorzucamy białą kulę. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że nieskończenie wiele razy wyciągniemy czarną kulę.

2. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi $p \neq 1/2$. Niech dla $n = 2, 4, 6, \ldots$, A_n oznacza zdarzenie, iż w n pierwszych rzutach wypadło tyle samo orłów, co reszek. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 zaszło skończenie wiele zdarzeń A_n.

3. Z odcinka $[0, 1]$ wybieramy kolejno nieskończenie wiele liczb X_1, X_2, ... Udowodnić, że

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_1 X_2 \ldots X_n = 0) = 1.$$

4. Rzucamy symetryczną monetą aż do momentu, gdy wyrzucimy 5 reszek (łącznie, niekoniecznie pod rząd). Niech X oznacza liczbę rzutów. Wyznaczyć rozkład zmiennej X.

5. Zmienna losowa X ma ciągłą rosnącą dystrybuantę F. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej $F(X)$.

6. Dane są zmienne losowe X, Y, przy czym $\sigma(X) \subseteq \sigma(Y)$. Udowodnić, że $X = f(Y)$ dla pewnej funkcji borelowskiej f.

7. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F_\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -1, \\ \frac{1}{2}(t+1) & \text{dla } -1 \leq t < 0, \\ \frac{3}{4} & \text{dla } 0 \leq t < 4, \\ 1 & \text{dla } t \geq 4. \end{cases}$$

Obliczyć $\mathbb{P}(X = -5)$, $\mathbb{P}(2 < X \leq 5)$, $\mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{P}(-1 < X < 0)$.

8. Rzucamy trzy razy monetą. Zmienna losowa X określona jest następująco: 0 jeśli liczba orłów jest większa niż liczba reszek oraz 2 jeśli tak nie jest. Opisać σ-ciało generowane przez zmienną X.