Zadania na trzecią kartkówkę

1. Zmienna losowa X ma rozkład geometryczny z parametrem $2/3$. Obliczyć $\mathbb{E}e^X$, $\mathbb{E}(3X+5)$ oraz udowodnić, że dla każdego $0 < p < \infty$, zmienna X ma skończony moment rzędu p.

2. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, 10)$. Obliczyć $\mathrm{Cov}([X], \{X\})$. Czy $[X]$, $\{X\}$ są niezależne?

Uwaga: Dla $x \in \mathbb{R}$, symbole $[x]$, $\{x\}$ oznaczają, odpowiednio, część całkowitą i część ułamkową liczby x.

3. Zmienna losowa X ma rozkład $\Gamma(\lambda, r)$, λ, $r > 0$. Wyznaczyć p-ty moment zmiennej X, $0 < p < \infty$.

4. Dziesięciu chłopców i dziesięć dziewczynek ustawia się losowo w pary. Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję liczby par złożonych z samych dziewczynek.

5. Grupa n osób ($n \geq 2$), wśród których są osoby A i B, ustawia się losowo w kolejce. Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję liczby osób stojących między A i B.

6. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 100\}$ losujemy ze zwracaniem liczby aż do momentu, gdy jakaś liczba się powtórzy. Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję liczby losowań.

7. Zmienna losowa X jest całkowalna. Udowodnić, że dla $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X - |\mathbb{E}X| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}|X|}{t}.$$

8. Zmienna losowa X na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ma rozkład Poissona z parametrem 2.

a) Dla jakich $a > 0$ zmienna a^X należy do $L^3(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$?

b) Udowodnić, że dla $t > 2$,

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \left(\frac{2}{t}\right)^t e^{t-2}.$$

9. Zmienna losowa X ma scentrowany rozkład normalny (tzn. o średniej 0) o wariancji σ^2. Udowodnić, że dla liczby całkowitej dodatniej n,

$$\mathbb{E}X^n = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } n \text{ jest nieparzyste,} \\ (n-1)!!\sigma^n & \text{jeśli } n \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

10. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = (x + y)1_{\{x,y \in [0,1]\}}.$$

a) Wyznaczyć średnią wektora (X, Y) oraz jego macierz kowariancji.
b) Obliczyć $\mathbb{E}X^2Y$.
c) Obliczyć $\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y)$. Czy zmienne $X+Y$, $X-Y$ są niezależne?

11. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-x^2 - xy - \frac{y^2}{2}\right).$$

a) Wyznaczyć macierz kowariancji zmiennej (X, Y).
b) Wyznaczyć taką liczbę $a \in \mathbb{R}$, by zmienne $X+Y$, $X+aY$ były niezależne.

12. Zmienne losowe X, Y mają tę własność, że $X+Y$ oraz $X+11$ są całkowalne z kwadratem. Udowodnić, że Y jest także całkowalna z kwadratem.