Zadania przygotowawcze z RP1

Omówienie: 15 VI od 11, 16 VI od 10.
Uwaga: *Ten plik może być modyfikowany. Mogą pojawić się nowe zadania.*

1. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $B(10, 1/4)$. Niech $Y_n = \max_{k \le n} X_k$ dla $n \ge 1$. Udowodnić, że ciąg (Y_n) jest zbieżny p.n. i wyznaczyć jego granicę.

2. Liczby 1, 2, ..., n ustawiono losowo w ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dla każdego $k \ge 3$, $a_k \ge a_{k-1}$ lub $a_k \ge a_{k-2}$ (tzn. k-ty wyraz jest większy od któregoś z dwóch poprzedzających go wyrazów)?

3. Zmienne X_1, X_2, ... są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $[0, e]$. Zbadać zbieżność ciągu

$$X_1 X_2^{1/2} X_3^{1/3} \dots X_n^{1/n}$$

w sensie zbieżności p.n.

4. Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 2. Wyznaczyć $\mathbb{E}(\frac{Y}{X+Y}|X)$.

5. W urnie znajduje się 5 białych, 6 czarnych oraz 1 czerwona kula. Losujemy ze zwracaniem aż do momentu, gdy wyciągniemy co najmniej jeden raz białą i co najmniej raz czerwoną kulę. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby wyciągniętych kul czarnych.

6. Liczba wypadków samochodowych danego dnia ma rozkład Poissona z parametrem 20. Szkoda powstała na wskutek wypadku ma rozkład wykładniczy z parametrem 1/5. Zakładając niezależność szkód odpowiadających różnym wypadkom,
a) obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję łącznej szkody danego dnia.
b) przy założeniu, iż szkoda nie przekroczyła 20, jakie jest prawdopodobieństwo, że były nie więcej niż dwa wypadki?

7. Zmienne losowe ξ_1, ξ_2, ... są niezależne, przy czym dla $k \ge 1$,

$$\mathbb{P}(\xi_k = i) = 1/k, \qquad i = 1, 2, \dots, k.$$

Udowodnić, że jeśli m, n są liczbami całkowitymi dodatnimi, to $m\xi_n + \xi_m - m$ ma ten sam rozkład, co ξ_{mn}.

8. Wewnątrz trójkąta równobocznego o boku 1 losujemy punkt. Niech X oznacza odległość tego punktu od brzegu trójkąta. Wyznaczyć rozkład, wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X.

9. W partii 1000 śrub jest 5 wybrakowanych sztuk. Śruby zapakowano do 100 pudełek (po 10 w każdym). Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w wybranym pudełku będą co najmniej dwie wadliwe śruby?

10. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{3}{8} x^2 1_{[0,2]}(x).$$

Wyznaczyć taką funkcję G, by zmienna $G(X)$ miała rozkład wykładniczy z parametrem 3.

11. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x,y) = \frac{x}{(e-2)(y+1)^2} 1_D(x,y),$$

gdzie $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq e-2, y \geq x\}$.
a) Czy zmienne X, Y są niezależne?
b) Czy X, Y należą do L^1?
c) Obliczyć $E(X|Y)$.
d) Czy Y/X, X są niezależne?

12. Rzucamy jednocześnie dwiema symetrycznymi monetami aż do momentu gdy na którejś z nich wypadnie 1000 orłów. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że rzucimy mniej niż 2000 razy.

13. Zmienna losowa (X, Y) ma scentrowany rozkład normalny, przy czym $\mathbb{E}(X|X+Y) = \frac{1}{2}(X+Y)$. Udowodnić, że zmienne $X - Y$ oraz $X + Y$ są niezależne. Czy zmienne X, Y muszą być niezależne?

14. Zmienne X_1, X_2, $\ldots$ są niezależne, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład wykładniczy z parametrem n. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny p.n.? Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n/n$ jest zbieżny p.n.?

15. Zmienne X_1, X_2, $\ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na przedziale $[3, 4]$. Udowodnić, że ciąg

$$Y_n = \sqrt[n]{\frac{X_n}{X_1}}, \qquad n = 1,\, 2,\, \ldots$$

jest zbieżny p.n.