RP 1, zadania na drugą kartkówkę

1. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{1}{4} x^3 1_{[0,2]}(x).$$

a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y = \max(X, 1)$.
b) Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej $Z = (X - 1)^3$.

2. Zmienne X, Y są niezależne, X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 2]$, a rozkład Y jest zadany przez równości $\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$.

3. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = C(x^2 + y^2) 1_{\{x^2+y^2 \leq 1\}}.$$

a) Wyznaczyć C.
b) Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej X.
c) Udowodnić, że zmienne $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ oraz Y mają ten sam rozkład.
d) Czy zmienne $\sqrt{X^2 + Y^2}$ oraz X/Y są niezależne?

4. Dystrybuanta F_X zmiennej X spełnia warunek $F(t) + F(-t) = 1$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi równość $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X \in -A)$, gdzie $-A = \{x : -x \in A\}$.

5. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład Poissona z parametrem 2, a Y ma rozkład geometryczny z parametrem $\frac{1}{3}$.
a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $\min\{X, 2\}$.
b) Obliczyć $\mathbb{P}(X = Y)$.

6. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład $\Gamma(\lambda, 2)$ oraz Y ma rozkład wykładniczy z parametrem μ (λ, $\mu > 0$).
a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $\frac{X}{Y}$.
b) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$.

7. Zmienne X, Y są niezależne, przy czym X oraz XY mają rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$. Udowodnić, że Y ma rozkład jednopunktowy, skoncentrowany w 1.

8. Z odcinka $[0, 1]$ losujemy niezależnie liczby a_1, a_2, ... Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 ciąg (a_n) zawiera podciąg rosnący.

9. Zmienne X_1, X_2, ... są niezależne, przy czym dla każdego $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład Bernoulliego z parametrami n, $\frac{1}{n+1}$. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 nieskończenie wiele spośród zmiennych X_2, X_3, ... przyjmie tę samą wartość co X_1.

10. Zmienna losowa X ma standardowy rozkład normalny. Udowodnić, że $|X|$ oraz $\frac{X}{|X|}$ są niezależne.

11. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = Cx1_{\{|y| \leq x \leq 1\}}.$$

a) Wyznaczyć C.

b) Wyznaczyć rozkład zmiennej Y/X oraz rozkład zmiennej X. Czy zmienne te są niezależne?

c) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$.

12. Zmienne losowe X_1, X_2, ... są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$. Definiujemy

$$\tau = \inf\{n : X_1 + X_2 + \ldots + X_n \geq 1\}.$$

Wyznaczyć rozkład zmiennej τ.