

### Zadania z RP1 - 13

1. Zmienne losowe  $N, X_1, X_2, \dots$  są niezależne,  $N$  ma rozkład Poissona z parametrem 2, a  $X_i$  mają rozkład wykładniczy z parametrem 3. Wyznaczyć

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \dots + X_N).$$

2. Zmienne  $(X_n)$  są niezależnymi zmiennymi Rademachera. Udowodnić, że  $(X_n)$  nie jest zbieżny p.n.. Czy  $(X_n)$  jest zbieżny według prawdopodobieństwa?

3. Dany jest ciąg  $(X_n)$  jak poprzednio. Udowodnić, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n$  jest zbieżny p.n. i wyznaczyć rozkład graniczny.

4. Dane są ciągi  $(X_n), (Y_n)$  zbieżne według prawdopodobieństwa do  $X, Y$ , odpowiednio. Udowodnić, że

- a)  $(X_n + Y_n)$  zbiega do  $X + Y$  według prawdopodobieństwa.
- b)  $(X_n Y_n)$  zbiega według prawdopodobieństwa do  $(XY)$ .

5. Dany jest ciąg  $(X_n)$  scentrowanych zmiennych normalnych zbieżny w  $L^p$  do  $X$ . Udowodnić, że  $X$  ma rozkład normalny lub jest stała p.n.

6. Podać przykład ciągu  $(X_n)$  zbieżnego p.n. ale nie w  $L^1$ .

7. Dana jest całkowalna zmienna losowa  $X$ . Niech dla  $n \geq 1$ ,

$$X_n(\omega) = \begin{cases} -n & \text{jeśli } X(\omega) < -n, \\ X(\omega) & \text{jeśli } |X(\omega)| \leq n, \\ n & \text{jeśli } X(\omega) > n. \end{cases}$$

Czy  $(X_n)$  zbiega do  $X$  p.n.? Czy zbiega w  $L^1$ ?

8. Dane są ciągi  $(X_n), (Y_n)$  zbieżne p.n. do zmiennych  $X, Y$ . Udowodnić, że jeśli dla każdego  $n$  zmienne  $X_n$  oraz  $Y_n$  mają ten sam rozkład, to  $X$  i  $Y$  też mają ten sam rozkład.