Zadania na czwartą kartkówkę

1. Zmienna losowa X jest całkowalna, a $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ są σ-ciałami takimi, że X jest niezależna od $\mathcal{F}_2$. Udowodnić, że
$$\mathbb{E}(X|\sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1).$$

2. Zmienna losowa X ma rozkład Bernoulliego z parametrami 100, $\frac{1}{4}$. Obliczyć $\mathbb{E}(X|X^2)$ oraz $\mathbb{E}(X|1_{\{X=0\}})$.

3. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością
$$g(x, y) = Ce^{-x}1_{\{0 \le y \le x\}}.$$
Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X)$ oraz $\mathbb{E}(X|Y)$.

4. Zmienne losowe ε_1, ε_2, ε_3 są niezależne i mają ten sam rozkład zadany przez
$$\mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = 1/2.$$
Wyznaczyć $\mathbb{E}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\varepsilon_3|\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$.

5. Dany jest ciąg (λ_n) liczb dodatnich zbieżny do 0 oraz ciąg (X_n) zmiennych losowych (niekoniecznie niezależnych) taki, że dla $n \ge 1$ zmienna X_n ma rozkład Poissona z parametrem λ_n. Udowodnić, że (X_n) zbiega do 0 p.n. Czy zbiega on w L^2?

6. Ciąg (X_n) zbiega według prawdopodobieństwa do X, a ciąg (Y_n) zbiega w L^2 do zmiennej stałej, równej 1. Czy ciąg (X_nY_n) jest zbieżny w L^1?

7. Dany jest ciąg (X_n) zmiennych nieujemnych całkowalnych, zbieżny p.n. do zmiennej X.
a) Udowodnić, że X jest całkowalna.
b) Załóżmy dodatkowo, iż $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X$. Udowodnić, że (X_n) zbiega do X w L^1.

8. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych, z których każda ma rozkład Bernoulliego z parametrami 100, 1/2. Udowodnić, że ciąg
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 + 1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$
jest zbieżny p.n. i wyznaczyć jego granicę.

9. Dany jest ciąg (ε_n) niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, zadanym przez
$$\mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$
Udowodnić, że ciąg
$$\frac{1}{n^2} \sum_{1 \le k < l \le n} \varepsilon_k\varepsilon_l, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

jest zbieżny p.n. i wyznaczyć jego granicę.

10. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$, zmienna X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $[-3^n, 3^n]$. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

nie jest zbieżny p.n.