Zadania z RP1 - 10

1. Rzucamy kostką aż do momentu, gdy wyrzucimy wszystkie liczby oczek. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

2. Liczby 1, 2, $\ldots$, n ustawiono losowo w ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Niech N oznacza największą taką liczbę, że $a_k > a_{k-1}$ dla $k \leq N$. Obliczyć $\mathbb{E}N$.

3. Zmienna losowa X należy do $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie p jest ustaloną liczbą niemniejszą niż 1. Udowodnić, że

$$\lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}(|X| \geq t) = 0.$$

4. Zmienna losowa X ma wariancję $\sigma^2 < \infty$. Udowodnić, że

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > 3\sigma) \leq \frac{1}{9}.$$

5. Zmienna losowa X jest całkowalna z kwadratem i ma następującą własność: istnieje niezależna od niej, całkowalna z kwadratem zmienna Y taka, że $X + Y$ oraz aX mają ten sam rozkład, $a \in (-1, 1)$. Udowodnić, że X jest stała p.n..

6. a) Zmienna losowa X ma następującą własność: dla każdej liczby naturalnej n mamy

$$\mathbb{E}|X|^n \leq \binom{2n}{n}.$$

Udowodnić, że istnieje taka liczba M, że $|X| \leq M$ p.n.

b) Udowodnić,że dla dowolnej zmiennej losowej $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

$$\lim_{p\to\infty} ||X||_p = ||X||_\infty.$$

7. Zmienne losowe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład $\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = 1/2$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Niech $A = (\sum_{k=1}^n a_k^2)^{1/2}$. Udowodnić, że

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^n a_k\varepsilon_k\right| > t\right) \leq 2\exp(-t^2/2A^2).$$

8. Zmienne $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ są niezależne i mają ten sam rozkład $\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = 1/2$, $k = 1, 2, \ldots$. Niech $S_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnić, że

$$\limsup \frac{S_n}{\sqrt{2n\log n}} \leq 1 \qquad \text{p.n.}$$

oraz

$$\liminf \frac{S_n}{\sqrt{2n\log n}} \geq -1 \qquad \text{p.n..}$$

9. Dany jest ciąg $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z ciągłą dystrybuantą. Niech $\tau = \inf\{n : X_n > X_0\}$. Wyznaczyć rozkład τ i obliczyć $\mathbb{E}\tau$.

10. Zmienna losowa X ma d-wymiarowy rozkład normalny z gęstością

$$g(x) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(A(x-m), x-m)\right],$$

gdzie A jest symetryczną dodatnio określoną macierzą $d \times d$ oraz $m \in \mathbb{R}^d$. Udowodnić, że $\mathbb{E}X = m$ oraz $\Lambda = A^{-1}$.