Zadania z RP1 - 12

1. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na $[0,1]^2$.
a) Wyznaczyć rozkład $(\min(X,Y), \max(X,Y))$.
b) Obliczyć $\mathbb{E}(\min(X,Y)|\max(X,Y))$ oraz $\mathbb{E}(\sin(\min(X,Y))|\max(X,Y))$.

2. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x,y) = \frac{x^3}{2} e^{-x(y+1)} 1_{\{x,y \geq 0\}}.$$

Wyznaczyć $\mathbb{E}(Y|X)$.

3. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(X+Y|X-Y)$ oraz $\mathbb{E}(XY|X+Y)$.

4. Rzucamy kostką aż do momentu, gdy wyrzucimy szóstkę. Wyznaczyć wartość oczekiwaną sumy wyrzuconych liczb oczek.

5. W urnie znajduje się 5 białych, 6 czarnych i 7 niebieskich kul. Losujemy po jednej kuli ze zwracaniem aż do momentu, gdy wyciągniemy kulę niebieską. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby wyciągniętych kul czarnych.

6. Zmienne losowe X, Y są całkowalne z kwadratem, a $\mathcal{G}$ jest σ-ciałem. Udowodnić, że

$$\mathbb{E}[X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})Y].$$

7. Dane są zmienne losowe X, Y oraz σ-ciało $\mathcal{G}$ takie, że X jest mierzalna względem $\mathcal{G}$, a Y jest niezależna względem $\mathcal{G}$. Udowodnić, że jeśli ϕ jest taką funkcją borelowską, że $\phi(X,Y)$ jest całkowalne, to

$$\mathbb{E}(\phi(X,Y)|\mathcal{G}) = f(X),$$

gdzie $f(x) = \mathbb{E}\phi(x, Y)$.