Zadania z RP1 - 10

1. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem λ.
a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $(X/Y, X+Y)$.
b) Udowodnić, że zmienne X/Y, $X+Y$ są niezależne.
c) Wyznaczyć rozkład X/Y.
d) Wyznaczyć kowariancję $X+Y+\frac{X}{Y}$ oraz $\frac{X}{Y}$.

2. Zmienne X_1, X_2, ... są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem λ. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ oraz, dla $t \geq 0$, niech $N_t = \max\{n : S_n \leq t\}$. Udowodnić, że N_t ma rozkład Poissona z parametrem λt.

3. Zmienne X_1, X_2, ... są niezależne i mają ten sam rozkład $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$, gdzie $p \in (0,1)$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą. Niech

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Ustalmy a, $b \in \mathbb{Z}_+$ i niech

$$\tau = \inf\{n : S_n \in \{-a, b\}\}.$$

a) Udowodnić, że $\tau < \infty$ z prawdopodobieństwem 1.
b) Obliczyć $\mathbb{P}(S_\tau = -a)$, $\mathbb{P}(S_\tau = b)$.
c) Udowodnić, że jeśli $p = 1/2$, to błądzenie (S_n) z prawdopodobieństwem 1 dociera do każdej liczby całkowitej.

4. Przy oznaczeniach poprzedniego zadania, załóżmy, że $p = 1/2$. Udowodnić, że dla $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq t\right) \leq \exp(-t^2/2).$$

5. Przy oznaczeniach zadania 3, załóżmy, że $p = 1/2$. Udowodnić, że

$$\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{2n \log n}} \leq 1 \quad \text{p.n.}.$$

Wywnioskować stąd, że

$$\liminf_n \frac{S_n}{\sqrt{2n \log n}} \geq -1 \quad \text{p.n.}.$$

6. Niech X będzie zmienną losową i określmy $X_n = \min(X, n)$. Udowodnić, że $X_n \to X$ p.n.

7. Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie nieskoncentrowanym w jednym punkcie. Udowodnić, że ciąg (X_n) nie jest zbieżny p.n. oraz według prawdopodobieństwa.

8. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[-1, 1]$. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} X_1 X_2 \ldots X_n = 0 \text{ p.n.}$$