Zadania z RP1 - 6

1. Zmienne losowe X, Y mają następującą własność. Dla dowolnej liczby rzeczywistej t zachodzi równość

$$\mathbb{P}(X < t, Y < 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X < t).$$

a) Udowodnić, że $\mathbb{P}(Y < 1) = 1/2$.

b) Udowodnić, że dla dowolnego zbioru borelowskiego A zachodzi równość

$$\mathbb{P}(X \in A, Y < 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \in A).$$

2. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej

a) $Y = 5X + 6$,

b) $\ln X$.

3. Zmienne X_1, X_2, … są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrami λ_1, λ_2, …, λ_n. Wyznaczyć rozkład zmiennej $\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

4. Zmienne X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$, a rozkład zmiennej Y jest zadany równością $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 1) = 1/2$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$.

5. Zmienna X jest niezależna od siebie samej. Udowodnić, że istnieje stała C taka, że $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

6. Zmienne X_1, X_2, …, X_n są niezależne i mają rozkłady Poissona z parametrami λ_1, λ_2, …, λ_n. Wyznczyć rozkład zmiennej $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

7. Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem λ. Dla dowolnych liczb $k \leq n$, obliczyć $\mathbb{P}(X = k | X + Y = n)$.

8. Zmienna losowa X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Wyznaczyć gęstości zmiennych $Y = e^X$, $Z = X^2 + 1$.