Zadania z RP1 - 8

1. Rzucamy kostką aż do momentu, gdy wyrzucimy wszystkie liczby oczek. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

2. Liczby 1, 2, ..., n ustawiono losowo w ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Niech N oznacza największą taką liczbę, że $a_k > a_{k-1}$ dla $k \leq N$. Obliczyć $\mathbb{E}N$.

3. Zmienna losowa X jest całkowalna. Udowodnić, że dla dowolnej liczby $p < 1$,

$$\lim_{t\to\infty} t^p \mathbb{P}(|X| \geq t) = 0.$$

Udowodnić, że jest to prawdą także gdy $p = 1$.

4. Zmienna losowa X ma wariancję $\sigma^2 < \infty$. Udowodnić, że

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > 3\sigma) \leq \frac{1}{9}.$$

5. Rzucamy dwa razy symetryczną monetą, przy czym jeśli w ostatnim rzucie wypadł orzeł, to rzucamy jeszcze raz. Niech X oznacza liczbę wyrzuconych orłów. Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathrm{Var}X$.

6. Zmienna losowa X jest całkowalna z kwadratem i ma następującą własność: istnieje niezależna od niej, całkowalna z kwadratem zmienna Y taka, że $X + Y$ oraz aX mają ten sam rozkład, $a \in (-1, 1)$. Udowodnić, że X jest stała p.n..

7. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{3}{x^4} 1_{[1,\infty)}.$$

Wyznaczyć średnią i wariancję X. Dla jakich p moment rzędu p zmiennej X jest skończony?

8. Zmienne losowe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład $\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = 1/2$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Niech $A = (\sum_{k=1}^n a_k^2)^{1/2}$. Udowodnić, że

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^n a_k \varepsilon_k\right| > t\right) \leq 2\exp(-t^2/2A^2).$$