Zadania z RP1 - 11

1. Zmienne losowe X_1, X_2, ... są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Niech, dla $n \geq 1$,

$$Y_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \quad Z_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$

Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = 0 \text{ p.n. oraz } \lim_{n\to\infty} Z_n = \infty \text{ p.n.}$$

2. Zmienne losowe ε_1, ε_2, ... są niezależne i mają rozkład $\mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = 1/2$. Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}$$

jest zbieżny p.n. Jaki jest rozkład sumy tego szeregu?

3. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych takich, że dla $n \geq 1$ X_n ma rozkład Poissona z parametrem $1/n$. Czy (X_n) jest zbieżny według prawdopodobieństwa? Czy jest zbieżny p.n.? Czy jest zbieżny w L^2?

4. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n = 1, 2, \ldots$ zmienna X_n ma rozkład normalny ze średnią 0 i wariancją $1/n^2$. Czy ten ciąg jest zbieżny w L^2?

5. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n = 1, 2, \ldots$, zmienna X_n ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1 - 2^{-n}]$. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

jest zbieżny p.n.. Wyznaczyć granicę.

6. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z gęstością

$$g(x) = \frac{1}{7} x^2 1_{[1,2]}(x).$$

Udowodnić, że ciąg $(\sqrt[n]{X_1 X_2 \ldots X_n})$ jest zbieżny p.n.. Wyznaczyć granicę.

7. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla n parzystych X_n ma rozkład normalny o średniej 0 i wariancji 1, a dla n nieparzystych X_n ma rozkład normalny o średniej 1 i wariancji 2. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

jest zbieżny p.n.. Wyznaczyć granicę.

8. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem 3. Udowodnić, że ciąg

$$\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n + 2n}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}\right)$$

jest zbieżny p.n..

9. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_n = 0) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = 1)$, $p \in (0,1]$. Udowodnić, że $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \to \infty$ p.n.