Zadania z RP1 - 5

1. Wykonujemy doświadczenia Bernoulliego aż do chwili uzyskania pierwszego sukcesu. Niech X oznacza liczbę wykonanych doświadczeń, Y - czas oczekiwania na pierwszy sukces.

a) (Rozkład geometryczny) Wyznaczyć rozkłady zmiennych X oraz Y.

b) (Rozkład wykładniczy) Przypuśćmy, że doświadczenia wykonuje się n razy na sekundę, zaś prawdopodobieństwo uzyskania sukcesu wynosi λ/n, gdzie λ jest ustaloną liczbą dodatnią, a czas oczekiwania, X_n, mierzy się w sekundach. Wyznaczyć dystrybuantę X_n oraz zbadać jej zachowanie przy $n \to \infty$.

c) Wykazać, że rozkłady w a), b) mają tzw. własność braku pamięci: jeśli X ma rozkład geometryczny bąd"x wykładniczy, to

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s),$$

gdzie $s, t \in \mathbb{N}$ w przypadku a) oraz $s, t \in \mathbb{R}_+$ w przypadku b).

d) Udowodnić, że jedynym rozkładem na $[0, \infty)$ z własnością braku pamięci jest rozkład wykładniczy, a jedynym skupionym na liczbach naturalnych - geometryczny.

2. Zmienna losowa X ma ciągłą dystrybuantę F. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej $F(X)$.

3. Dane są zmienne losowe X, Y, przy czym $\sigma(X) \subseteq \sigma(Y)$. Udowodnić, że $X = f(Y)$ dla pewnej funkcji borelowskiej f.

4. Niech F będzie dystrybuantą zmiennej losowej X. Udowodnić, że $\mathbb{P}(X < t) = F(t-)$, $\mathbb{P}(X = t) = F(t) - F(t-)$.

5. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F_\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -1, \\ \frac{1}{2}(t+1) & \text{dla } -1 \leq t < 0, \\ \frac{3}{4} & \text{dla } 0 \leq t < 4, \\ 1 & \text{dla } t \geq 4. \end{cases}$$

Obliczyć $\mathbb{P}(X = -5)$, $\mathbb{P}(2 < X \leq 5)$, $\mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{P}(-1 < X < 0)$.

6. Rzucamy trzy razy monetą. Zmienna losowa X określona jest następująco: 0 jeśli liczba orłów jest większa niż liczba reszek oraz 2 jeśli tak nie jest. Opisać σ-ciało generowane przez zmienną X.

7. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 2. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej $Y = \min(X, X^2)$.