Zadania z RP1 - 7

1. Zmienna losowa X ma rozkład Cauchy'ego, tzn. rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

Udowodnić, że $1/X$ ma ten sam rozkład, co X.

2. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkłady geometryczne z parametrami p, r, odpowiednio. Obliczyć $\mathbb{P}(X < Y)$.

3. Zmienne losowe X, Y, Z są niezależne. Udowodnić, że zmienne $X+Y$, Z są niezależne.

4. Dana jest zmienna losowa X taka, że $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X=-3) = \frac{1}{2}$. Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}\frac{1}{X+2}$, $\mathbb{E}\cos(\pi X)$.

5. Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem 2. Obliczyć $\mathbb{E}6^X$.

6. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{3}{8}x^2 1_{[0,2]}.$$

Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}\frac{1}{1+x^3}$, $\mathbb{E}e^X$.

7. Na klasówce jest 5 zadań. Każdy z 30 uczniów rozwiąże każde z zadań z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Niech X oznacza liczbę uczniów, którzy rozwiążą co najmniej 4 zadania. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

8. W urnie znajduje się 50 białych kul. Losujemy ze zwracaniem po jednej kuli, przy czym wyciągniętą kulę malujemy na czerwono, jeśli jest biała. Niech X oznacza liczbę czerwonych kul w urnie po 20 losowaniach. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

9. Każdy bok i każdą przekątną sześciokąta foremnego malujemy losowo na jeden z trzech kolorów. Wybór każdego koloru jest jednakowo prawdopodobny, kolorowania różnych odcinków są niezależne. Niech X oznacza liczbę jednobarwnych trójkątów o wierzchołkach będących wierzchołkami sześciokąta. Obliczyć $\mathbb{E}X$.

10. Urna zawiera N kul, wśród których jest b kul białych. Losujemy bez zwracania n kul ($n \leq N$) i definiujemy X jako liczbę kul białych wśród wylosowanych kul. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

11. Zmienna losowa X ma rozkład z dystrybuantą

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < 0, \\ t/2 & \text{jeśli } 0 \le t < 1, \\ 3/4 & \text{jeśli } 1 \le t < 5, \\ 1\text{jeśli } t \ge 5. \end{cases}$$

Wyznaczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}2^X$.

12. Zmienna losowa X jest skoncentrowana na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych. Udowodnić, że

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \ge k).$$

13. Zmienna losowa X jest skoncentrowana na zbiorze liczb nieujemnych. Udowodnić, że

$$\mathbb{E}X = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X \ge t)dt = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > t)dt.$$

14. Zmienna losowa X jest skoncentrowana na zbiorze liczb nieujemnych, $p \in (1, \infty)$. Udowodnić, że

$$\mathbb{E}X^p = p\int_0^{\infty} t^{p-1}\mathbb{P}(X \ge t)dt = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > t)dt.$$