Zadania z RP1 - 9

1. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład ciągły. Udowodnić, że $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

2. Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$. Obliczyć $\mathbb{P}(X \leq 2Y)$ oraz wyznaczyć gęstość zmiennej $X + Y$.

3. Zmienne X_1, X_2, ... są niezależne i mają ten sam rozkład o ciągłej dystrybuancie. Niech $\tau = \inf\{n : X_n > X_1\}$. Wyznaczyć rozkład τ i obliczyć $\mathbb{E}\tau$.

4. Niech $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx$, $r > 0$. Mówimy, że zmienna X ma rozkład *gamma z parametrami* λ, r (ozn. $\Gamma(\lambda, r)$), jeśli ma gęstość

$$g_{\lambda,r}(x) = \frac{1}{\Gamma(r)}\lambda^r x^{r-1}e^{-\lambda x}1_{[0,\infty)}(x).$$

a) Udowodnić, że jeśli X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi, $X \sim \Gamma(\lambda, r)$, $Y \sim \Gamma(\lambda, s)$, to $X + Y \sim \Gamma(\lambda, r + s)$.

b) Udowodnić, że jeśli X_1, X_2, ..., X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathrm{Exp}(\lambda)$, to $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ ma rozkład $\Gamma(\lambda, n)$.

c) Udowodnić, że jeśli X_1, X_2, ..., X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$, to $X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ ma rozkład $\Gamma(1/2, n/2)$ (jest to tzw. rozkład *chi kwadrat o n stopniach swobody.*

5. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na kwadracie $\{(x, y) : |x| + |y| = \sqrt{2}\}$.

a) Czy zmienne X, Y są niezależne?

b) Obliczyć $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

c) Wyznaczyć rozkład X oraz rozkład Y.

d) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$.

e) Udowodnić, że zmienne $X + Y$ oraz $X - Y$ są niezależne.

6. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na kwadracie $[0, 1]^2$.

a) Czy zmienne X, Y są niezależne?

b) Wyznaczyć rozkład zmiennej $(\min(X, Y), \max(X, Y))$.