Zadania domowe z Procesów Stochastycznych I, seria 1

We wszystkich zadaniach poniżej, (W_t) jest procesem Wienera, a (N_t) jest procesem Poissona z parametrem 1.

1. (1p) Załóżmy, że procesy (W_t) oraz (N_t) są niezależne. Udowodnić, że proces

$$V_t = \begin{cases} W_t & t \leq 1, \\ (-1)^{N_1}(W_t - W_1) + W_1 & t > 1 \end{cases}$$

jest procesem Wienera.

2. (2p) Niech α będzie ustaloną liczbą nie mniejszą niż -2. Rozważmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} |W_n|^{\alpha}.$$

Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 wszystkie wyrazy tego szeregu są dobrze określone. Udowodnić, że szereg ten jest rozbieżny p.n.

3. (2p) Niech $X_t = e^{-t}W_{e^{2t}}$, $t \in \mathbb{R}$.
a) Wyznaczyć funkcję wartości oczekiwanej i kowariancji tego procesu.
b) Udowodnić, że jest to stacjonarny proces gaussowski.
c) Rozstrzygnąć, czy ma on niezależne przyrosty.
d) Udowodnić, że (X_t^3) nie jest gaussowski.

4. (2p) Niech τ_k będzie momentem k-tego dojścia procesu Wienera do zbioru $\{-5, 5\}$, $k = 1, 2, \ldots$, tzn.

$$\tau_1 = \inf\{t : |W_t| = 5\},$$

$$\tau_{k+1} = \inf\{t > \tau_k : |W_t| = 5\}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Udowodnić, że τ_k są momentami zatrzymania względem $(\mathcal{F}_{t+}^W)$ i $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \ldots$ z prawdopodobieństwem 1.