

Zadania domowe z Procesów Stochastycznych I, seria 2

1. (1p) Niech (N_t) będzie procesem Poissona z parametrem 1. Udowodnić, że proces $(tN_t^2 + 5)$ jest procesem Markowa. Czy jest to jednorodny (w czasie) proces Markowa? Wyznaczyć jego funkcję przejścia.

2. (2p) Rozstrzygnąć, czy istnieje proces Markowa (X_t) o tej własności, że $(|X_t|)$ nie jest procesem Markowa.

3. (2p) Niech (X_t) będzie scentrowanym procesem gaussowskim. Udowodnić, że (X_t) jest martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy ma on niezależne przyrosty.

4. (2p) Niech $d \geq 3$ będzie ustaloną liczbą całkowitą. Dla ustalonych liczb dodatnich $r < R$, niech

$$P = \{x \in \mathbb{R}^d : r < \|x\| < R\}.$$

Dla ustalonego $x_0 \in P$, niech (W_t) będzie d -wymiarowym procesem Wienera startującym z x_0 .

a) Udowodnić, że funkcja $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \|x\|^{2-d}$ jest harmoniczna.

b) Niech $\tau = \inf\{t : W_t \notin P\}$. Udowodnić, że $\tau < \infty$ p.n. oraz obliczyć $\mathbb{P}(W_\tau = r)$.