

Kolokwium ze Wstępu do Procesów Stochastycznych, 6 czerwca 2025 r.

Czas trwania: 180 minut. Można oddać dowolną liczbę zadań (każde za 6 p.), ale maksymalna łączna liczba punktów za całe kolokwium to 30.

1. Załóżmy, że $(W_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera.

a) Co jest większe: $\mathbb{P}(|W_4| > 2)$ czy $\mathbb{P}(W_1^2 \geq W_1 + 2)$?

b) Obliczyć $\mathbb{E}(W_2 | W_1 + W_3)$.

2. Załóżmy, że N jest procesem Poissona z parametrem 1. Dowieść, że z prawdopodobieństwem 1, w ciągu $N_1, N_2, N_3, \dots$ występuje nieskończenie wiele podciągów arytmetycznych długości 2025.

3. Dany jest scentrowany proces gaussowski $X = (X_t)_{t \geq 0}$ o funkcji kowariancji

$$K(s, t) = \frac{s \wedge t}{st}.$$

a) Udowodnić, że dla dowolnego $1 \leq p < \infty$ zachodzi zbieżność $X_t \rightarrow 0$ w L^p .

b) Czy X posiada modyfikację ciągłą?

4. Procesy X i Y mają te same rozkłady skończenie wymiarowe, przy czym $\limsup_{t \rightarrow \infty} X_t = 2$ p.n.

a) Czy wynika stąd, że $\limsup_{t \rightarrow \infty} Y_t = 2$?

b) Czy wynika stąd, że $\limsup_{t \rightarrow \infty} Y_{[t]} = 2$?

5. Dany jest nadmartynał $(X_t)_{t \geq 0}$ o prawostronnie ciągłych trajektoriach, taki, że proces $Y_t = e^{-X_t}$ jest martynałem. Dowieść, że X zbiega p.n. do zmiennej losowej całkowalnej.

6. Niech $(N_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem Poissona z parametrem $1/2$, a $(W_t)_{t \geq 0}$ - procesem Wienera (oba procesy są adaptowalne do wspólnej filtracji, nie zakładamy ich niezależności). Rozważmy $\tau = \inf\{t \geq 0 : |W_t| \geq \sqrt{N_t + 1}\}$. Obliczyć $\mathbb{E}\tau$.