

Kolokwium ze Wstępu do Procesów Stochastycznych, 15 maja 2025 r.

Czas trwania: 180 minut. Rozwiązania prosimy oddawać na oddzielnych kartkach, podpisanych imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Można oddać dowolną liczbę zadań (każde będzie punktowane w skali 0-6 p.), ale maksymalna łączna liczba punktów za całe kolokwium to 30.

1. Załóżmy, że $(W_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera.

- a) Obliczyć $\mathbb{E}(W_1 W_2^2 | W_1)$.
- b) Dla jakiej wartości parametru a , zmienne $aW_2 - W_1$ oraz W_2 są niezależne?
- c) Obliczyć $\mathbb{P}(W_2 > W_1 | W_2)$ (wynik wyrazić w zależności od dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego).

2. Załóżmy, że $(W_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera. Rozważamy procesy na $[0, \infty)$:

$$X_t = \sqrt{2}W_t + e^{2t+1}, \quad Y_t = \max\{W_t, W_{2t}\} - W_{2t}, \quad Z_t = (W_{t^2} - t)1_{\{W_t \neq t\}}.$$

Wskazać (z uzasadnieniem), które z powyższych procesów są gaussowskie i dla wskazanych procesów obliczyć funkcje wartości oczekiwanej oraz kowariancji.

3. Rozpatrzmy następujące podzbiory $\mathbb{R}^{[0, \infty)}$:

$$A_1 = \left\{ x : \sup_{t \in [0, \infty)} |x(t) + \sqrt{t}| < \infty \right\}, \quad A_2 = \left\{ x : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n) + \sqrt{n}| < \infty \right\}.$$

Które ze zbiorów A_1, A_2 należą do σ -ciała $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)})$ zbiorów cylindrycznych? Czy zbiory $A_1 \cap C[0, \infty)$, $A_2 \cap C[0, \infty)$ należą do σ -ciała $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)}) \cap C[0, \infty)$?

4. Załóżmy, że $(N_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Poissona z parametrem $\lambda > 0$.

- a) Obliczyć $\mathbb{P}(N_{n+\frac{1}{n}} - N_n = 0)$, $\mathbb{P}(N_{n+\frac{1}{n}} - N_n = 1)$ oraz $\mathbb{P}(N_{n+\frac{1}{n}} - N_n \geq 2)$.
- b) Wykazać, że $\limsup_{n \rightarrow \infty} (N_{n+\frac{1}{n}} - N_n) = 1$ p.n.

5. Dany jest martynał $(X_t)_{t \geq 0}$ o prawostronnie ciągłych trajektoriach, taki, że proces $Y_t = X_t^4 - X_t^2$, $t \geq 0$, jest nadmartynałem.

- a) Wykazać, że $(Y_t)_{t \geq 0}$ jest zbieżny p.n.
- b) Wykazać, że $(X_t)_{t \geq 0}$ jest zbieżny w L^4 . (Wskazówka: $\mathbb{E}X_t^2 \leq \sqrt{\mathbb{E}X_t^4}$).

6. Niech $(N_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem Poissona z parametrem 2, a $(W_t)_{t \geq 0}$ - procesem Wienera (oba procesy są adaptowalne do pewnej filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, nie zakładamy ich niezależności). Rozważmy $\tau = \inf\{t \geq 0 : N_t + W_t \geq 5\}$.

- a) Udowodnić, że τ jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.
- b) Udowodnić, że dla dowolnej liczby $t \geq 0$ zachodzi $\mathbb{E}(N_{\tau \wedge t} + W_{\tau \wedge t}) = 2\mathbb{E}(\tau \wedge t)$.
- c) Udowodnić, że $\mathbb{E}\tau \leq 3$.