

### Dodatkowe kolokwium ze Wstępu do Procesów Stochastycznych

*Czas trwania: 150 minut. Można oddać dowolną liczbę zadań (każde za 6 p.), ale maksymalna łączna liczba punktów za całe kolokwium to 30.*

1. Załóżmy, że  $(W_t)_{t \geq 0}$  jest procesem Wienera.
  - a) Dla jakiego  $a \in \mathbb{R}$  zmienne  $W_1 - W_2 + aW_3$  oraz  $W_3$  są niezależne?
  - b) Obliczyć  $\mathbb{P}(W_1 < W_2 < W_3)$  oraz  $\mathbb{P}(W_1 < W_2 | W_3)$ .
  
2. Załóżmy, że  $(N_t)_{t \geq 0}$  jest procesem Poissona z parametrem 5 i niech  $\tau = \inf\{t \geq 0 : N_t = 2\}$ .
  - a) Czy  $\tau$  jest niezależne od  $N_3$ ? Odpowiedź uzasadnić.
  - b) Obliczyć  $\mathbb{P}(\tau \in (3, 4))$ .
  - c) Obliczyć  $\mathbb{P}(\tau \in (3, 4) | N_3)$ .
  
3. Załóżmy, że  $(W_t)_{t \geq 0}$  jest procesem Wienera. Obliczyć  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{W_{2n}}{W_n}$ .
  
4. Załóżmy, że  $(N_t)_{t \geq 0}$  jest procesem Poissona z parametrem 1 i zdefiniujmy  $\tau = \inf\{t \geq 0 : N_t - t \leq -1 \text{ lub } N_t - t \geq 100\}$ ,  $\sigma = \inf\{t \geq 0 : N_t - t \leq -1\}$ .
  - a) Dowieść, że  $\tau < \infty$  prawie na pewno.
  - b) Dowieść, że  $\mathbb{P}(\tau = \sigma) \geq 100/101$ .
  - c) Dowieść, że  $\sigma < \infty$  prawie na pewno.
  
5. Dany jest proces  $(X_t)_{t \geq 0}$  o prawostronnie ciągłych trajektoriach, taki, że  $(\exp(X_t))_{t \geq 0}$  jest nadmartyngałem. Dowieść, że proces  $\left(\frac{X_t}{1 + X_t^2}\right)_{t \geq 0}$  zbiega w  $L^2$  gdy  $t \rightarrow \infty$ .
  
6. Dany jest proces gaussowski  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  o funkcji średniej równej zero oraz funkcji kowariancji  $K(\cdot, \cdot)$ , przy czym wiadomo, że  $X_0 = 0$  oraz proces  $(X_t^2 - t)_{t \geq 0}$  jest martyngałem względem naturalnej filtracji.
  - a) Dowieść, że  $\mathbb{E}[X_t^2 - t | X_s] = X_s^2 - s$  dla  $s \leq t$ .
  - b) Korzystając z a), wykazać, że  $K(s, t) = \min\{s, t\}$ .
  - c) Udowodnić, że  $X$  posiada modyfikację będącą procesem Wienera.