

**Egzamin poprawkowy ze Wstępu do Procesów Stochastycznych,
10.09.2025**

Czas trwania: 180 minut. Każde zadanie będzie punktowane w skali 0-10 punktów, ale za cały egzamin można uzyskać łącznie co najwyżej 50 punktów.

1. Dany jest proces Poissona $N = (N_t)_{t \geq 0}$ z parametrem 2.

- a) Obliczyć $\mathbb{P}(N_4 > N_2 = N_1)$.
- b) Obliczyć $\mathbb{E}(N_5 | N_3)$.
- c) Obliczyć $\mathbb{E}(N_3 | N_5)$.

2. Załóżmy, że $(W_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera.

- a) Wykazać, że z prawdopodobieństwem 1 nierówność $W_{2^n} - W_{2^{n-1}} \geq 2^{n/2}$ zachodzi dla nieskończenie wielu n .
- b) Wykazać, że z prawdopodobieństwem 1 nierówność $W_{2^n} - W_{2^{n-1}} \geq n2^{n/2}$ zachodzi dla skończenie wielu n .

3. Dane są dwa niezależne procesy Poissona $M = (M_t)_{t \geq 0}$, $N = (N_t)_{t \geq 0}$ z parametrem 1. Niech $\tau = \inf\{t \geq 0 : M_t > N_t\}$.

- a) Wykazać, że $X_t = M_t - N_t$ oraz $Y_t = (M_t - N_t)^2 - 2t$, $t \geq 0$, są martynałami względem filtracji $\mathcal{F}_t = \sigma(M_s, N_s : s \leq t)$, $t \geq 0$.
- b) Wykazać, że $\tau < \infty$ p.n.
- c) Dowieść, że $\mathbb{E}\tau = \infty$.

4. Dany jest scentrowany proces gaussowski $X = (X_t)_{t \geq 0}$ o funkcji kowariancji $K(s, t) = \cos(t - s)$.

- a) Czy dla dowolnych $s, t \geq 0$, zmienne $X_s + X_t$ oraz $X_s - X_t$ są niezależne?
- b) Wyznaczyć rozkład wektora (X_0, X_π) .
- c) Wykazać, że $X_0 = -X_\pi$ prawie na pewno.

5. Załóżmy, że $((X_t)_{t \geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in \{0,1\}})$ jest jednorodną rodziną Markowa na dwuelementowej przestrzeni stanów $E = \{0, 1\}$, o prawostronnie ciągłych trajektoriach, z macierzą przejścia

$$P_t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 + 2e^{-7t} & 2 - 2e^{-7t} \\ 3 - 3e^{-7t} & 2 + 3e^{-7t} \end{pmatrix}.$$

- a) Obliczyć $\mathbb{P}_1(X_{1/7} = X_{2/7} = X_{3/7} = 0)$.
- b) Wyznaczyć rozkład zmiennej $\tau = \inf\{t : X_t = 1\}$ przy założeniu, że $X_0 = 0$.
Wskazówka do b): skorzystać z a), a raczej z pewnego uogólnienia tego podpunktu.

6. Niech $W = (W_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem Wienera. Określmy $\tau = \inf\{t \geq 0 : |W_t| = 1\}$ oraz $\sigma = \inf\{t \geq \tau : W_t = 0\}$.

- a) Wykazać, że $\sigma + \tau$ jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_{t+}^W)_{t \geq 0}$.
- b) Obliczyć $\mathbb{P}(\sigma < \tau + 4)$.

Wskazówka do a): Zgodnie z odpowiednim zadaniem z ćwiczeń, wystarczy sprawdzić, że $\{\sigma + \tau < t\} \in \mathcal{F}_t^W$ dla każdego t .