

Egzamin zerowy ze Wstępu do Procesów Stochastycznych, 14.06.2025

Czas trwania: 150 minut. Każde zadanie będzie punktowane w skali 0-10 punktów, ale za cały egzamin można uzyskać łącznie co najwyżej 50 punktów.

1. Załóżmy, że $(N_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Poissona z parametrem 3.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w przedziale czasowym $(1, 2]$ proces $(N_t)_{t \geq 0}$ ma dokładnie jeden skok.

b) Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 istnieje przedział czasowy długości 2025, w którym proces $(N_t)_{t \geq 0}$ ma dokładnie jeden skok.

2. Dany jest scentrowany proces gaussowski $(X_t)_{t \geq 0}$ o niezależnych przyrostach i prawostronnie ciągłych trajektoriach.

a) Wykazać, że proces $(X_t^2 - \mathbb{E}X_t^2)_{t \geq 0}$ jest martyngałem.

b) Wykazać, że jeśli martyngał z a) zbiega w L^2 , to zbiega także w L^4 .

3. Dane są procesy Poissona $(M_t)_{t \geq 0}$ i $(N_t)_{t \geq 0}$, z parametrami 1 oraz 2, odpowiednio (nie zakładamy ich niezależności). Niech $\tau = \inf\{t : |2M_t - N_t| \geq 100\}$.

a) Dowieść, że proces $(2M_{\tau \wedge t} - N_{\tau \wedge t})_{t \geq 0}$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji, zbieżnym prawie na pewno. Czy martyngał ten zbiega w L^1 ?

b) Wykazać, że $\tau < \infty$ z prawdopodobieństwem 1.

4. Niech $(W_t)_{t \geq 0}$ będzie standardowym procesem Wienera.

a) Udowodnić, że proces

$$X_t = \exp(W_{3t} + t^2), \quad t \geq 0,$$

jest procesem Markowa względem filtracji $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ i wyznaczyć funkcję przejścia.

b) Rozstrzygnąć, czy proces $(X_t)_{t \geq 0}$ jest jednorodnym procesem Markowa.

c) Obliczyć $\mathbb{P}(X_1 \geq e, X_2 \leq X_1)$.

5. Załóżmy, że $(W_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera i niech $\tau = \inf\{t \geq 0 : W_t = 5\}$, $\sigma = \inf\{t \geq 0 : W_t = -2\}$.

a) Obliczyć $\mathbb{P}(W_{\tau+1} < 5 | \mathcal{F}_\tau^W)$.

b) Obliczyć $\mathbb{E}(W_{\tau+1}^2 | \mathcal{F}_\tau^W)$.

c) Obliczyć $\mathbb{P}(\tau + 1 < \sigma | \mathcal{F}_\tau^W)$. (Przypomnienie: $\{\tau < \sigma\}$, $\{\sigma < \tau\} \in \mathcal{F}_\tau^W$.)

6. Dana jest jednorodna rodzina Markowa $((X_t)_{t \geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{Z}})$ na przestrzeni $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}})$ o funkcji przejścia $P_t(\cdot, \cdot)$ spełniającej warunek

$$P_t\left(x, \{x, x+1, x+2, \dots\}\right) \leq 1/2 \quad \text{dla dowolnych } t \in (1, 5), x \in \mathbb{Z}.$$

a) Dowieść, że $\mathbb{P}_0(X_1 > X_4) > 1/2$.

b) Dowieść, że ciąg $X_1, X_2, \dots$ jest rozbieżny z $\mathbb{P}_0$ -prawdopodobieństwem 1.

(Wskazówka do b): jak wyglądają ciągi zbieżne o wyrazach w $\mathbb{Z}$?)