

Egzamin ze Wstępu do Procesów Stochastycznych, 01.07.2025

Czas trwania: 180 minut. Każde zadanie będzie punktowane w skali 0-10 punktów, ale za cały egzamin można uzyskać łącznie co najwyżej 50 punktów.

1. Niech $N = (N_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem Poissona z parametrem 2, a τ_1, τ_2 będą momentami dojścia procesu N do 1 i do 2, odpowiednio.

- a) Obliczyć $\mathbb{E}\tau_2$.
- b) Obliczyć $\mathbb{P}(\tau_1 > 1, \tau_2 > 2 \mid N_3 = 3)$.
- c) Obliczyć $\mathbb{E}(\tau_1 \mid N_3)$.

2. Załóżmy, że $(W_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera i niech $X_t = \exp(W_t - t)$, $t \geq 0$.

- a) Czy proces $(X_t)_{t \geq 0}$ jest nadmartyngałem względem naturalnej filtracji?
- b) Wykazać, że $(X_t)_{t \geq 0}$ zbiega p.n. i wyznaczyć rozkład graniczny.
- c) Niech $\tau = \inf \{t \geq 0 : X_t \in \{\frac{1}{2}, 2\}\}$. Wykazać, że $\tau < \infty$ prawie na pewno oraz obliczyć $\mathbb{P}(X_\tau = 2)$.

Wskazówka do c): poszukać funkcji f takiej, że $(f(X_t))_{t \geq 0}$ jest martyngałem.

3. Dany jest proces $X = (X_t)_{t \geq 0}$ o ciągłych trajektoriach, taki, że $X_0 = 0$ p.n. oraz $(X_t^2 - 2t)_{t \geq 0}$ jest podmartyngałem względem naturalnej filtracji.

- a) Niech $\tau = \inf \{t : |X_t| = 1\}$. Dowieść, że $\mathbb{E}\tau \leq \frac{1}{2}$.
- b) Wykazać, że $\limsup_{t \rightarrow \infty} |X_t| = \infty$ p.n.

4. Niech $(W_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem Wienera, zdefiniujmy $\tau = \inf \{t > 0 : W_t = 2\}$ oraz $\sigma = \inf \{t > \tau : W_t = -2\}$.

- a) Obliczyć $\mathbb{P}(\tau < 4, W_4 \in [-1, 1])$.
- b) Obliczyć $\mathbb{P}(\sigma < 4, W_4 \in [-1, 1])$.

5. Załóżmy, że $(W_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera, a $(N_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Poissona z parametrem 4.

- a) Czy proces $X_t = W_t^3 + t$, $t \geq 0$, jest procesem Markowa? Jeśli tak, podać funkcję przejścia i rozstrzygnąć, czy jest to proces jednorodny w czasie.
- b) Czy proces $Y_t = 1_{\{N_t \geq 1\}}$, $t \geq 0$, jest procesem Markowa? Jeśli tak, podać funkcję przejścia i rozstrzygnąć, czy jest to proces jednorodny w czasie.

6. Dana jest jednorodna mocna rodzina Markowa $((X_t)_{t \geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}})$ na przestrzeni stanów $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, posiadająca ciągłe trajektorie. Rozważmy moment stopu $\tau = \inf \{t \geq 0 : X_t \leq 0\}$ i załóżmy, że dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi warunek

$$\mathbb{P}_x(\tau \geq 25) \leq 80/81.$$

Wykazać, że dla wszystkich $k = 1, 2, 3, \dots$ oraz wszystkich $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$\mathbb{P}_x(\tau \geq 25k) \leq (80/81)^k.$$

Wynioskować stąd, że $\mathbb{E}_x \tau \leq 2025$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.