Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 8

1. Załóżmy, że X, Y są zmiennymi losowymi a $\mathcal{G}$ jest σ-ciałem takim, że X jest mierzalne względem $\mathcal{G}$, a Y jest niezależne od $\mathcal{G}$. Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją borelowską taką, że $\phi(X, Y)$ jest całkowalną zmienną losową. Udowodnić, że

$$\mathbb{E}[\phi(X, Y)|\mathcal{G}] = \Phi(X),$$

gdzie $\Phi(x) = \mathbb{E}\phi(x, Y)$.

2. Załóżmy, że X jest całkowalną zmienną losową, a σ-ciało $\mathcal{G}$ jest niezależne od X oraz od σ-ciała $\mathcal{M}$. Udowodnić, że

$$\mathbb{E}(X|\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{M})) = \mathbb{E}(X|\mathcal{M}).$$

3. Załóżmy, że (X, Y) ma rozkład z gęstością g i niech $g_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x, y)dx$ będzie gęstością zmiennej Y. Zdefiniujmy *gęstość warunkową* wzorem

$$g_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{g(x,y)}{g_Y(y)} & \text{jeśli } g_Y(y) \neq 0, \\ 0 & \text{jeśli } g_Y(y) = 0. \end{cases}$$

Wówczas dla dowolnej funkcji borelowskiej $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mamy

$$\mathbb{E}(h(X)|Y) = \int_{\mathbb{R}} h(x) g_{X|Y}(x|Y)dx.$$

4. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$g(x, y) = \frac{x^3}{2} e^{-x(y+1)} 1_{\{x>0,\, y>0\}}.$$

Wyznaczyć $\mathbb{E}(Y|X)$ oraz $\mathbb{P}(Y > 5|X)$.

5. Zmienne losowe ε_1, ε_2, ε_3 są niezależne i mają ten sam rozkład $\mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = 1/2$, $i = 1, 2, 3$. Obliczyć $\mathbb{E}(\varepsilon_1|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$ oraz $\mathbb{E}(\varepsilon_1\varepsilon_2|\varepsilon_1 + \varepsilon_2\varepsilon_3)$.

6. Wiadomo, że p procent monet stanowią monety fałszywe, z orłem po obu stronach. Losujemy ze zwracaniem n monet i każdą z nich wykonujemy rzut. Niech F oznacza liczbę losowań, w wyniku których wyciągnięto monetę fałszywą, O - liczba wyrzuconych orłów. Udowodnić, że $\mathbb{E}(F|O) = \frac{2p}{100+p} O$.

7. Dane są dwie niezależne zmienne X, Y o rozkładach Poissona z parametrami λ, μ, odpowiednio. Obliczyć $\mathbb{E}(X|X + Y)$.

8. Zmienna X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, zaś Y jest zmienną losową taką, że jeśli $X = x$, to Y ma rozkład wykładniczy z parametrem x.

a) Wyznaczyć rozkład Y.

b) Obliczyć $\mathbb{P}(X > r|Y)$.