

Egzamin zerowy z Procesów Stochastycznych, 15 czerwca 2026 r.

Czas trwania: 180 minut.

1. a) (2p.) Rozwiązać równanie $x' = \frac{2x}{1+t}$, $t \geq 0$, z warunkiem początkowym $x(0) = 1$.
b) (8p.) Niech a, b będą ustalonymi liczbami. Rozwiązać równanie stochastyczne

$$dX_t = \left(\frac{2X_t}{1+t} + a(1+t)^2 \right) dt + b(1+t)^2 dB_t, \quad t \geq 0,$$

z warunkiem początkowym $X_0 = 1$.

2. Rozważmy stochastyczne równanie różniczkowe

$$dX_t = \frac{X_t}{1+X_t^2} dt + dB_t, \quad t \geq 0,$$

z warunkiem początkowym $X_0 = 0$.

- a) (3p.) Wykazać, że równanie to posiada jednoznaczne silne rozwiązanie.
b) (4p.) Dla X pochodzącego z a), wyznaczyć taką funkcję f niebędącą stałą, że proces $(f(X_t))_{t \geq 0}$ jest martyngałem.
c) (5p.) Niech $\tau = \inf \{t \geq 0 : X_t \in \{-1, \sqrt{3}\}\}$. Wyznaczyć $\mathbb{P}(X_\tau = -1)$.

3. Załóżmy, że $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczonym, ciągłym rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \frac{1}{2}u_{xx}(t, x) + 2u_x(t, x) + 1 & \text{dla } (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = \cos x & \text{dla } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- a) (4p.) Wyznaczyć probabilistyczny wzór na u .
b) (6p.) Korzystając z a), podać jawny wzór na u .

Wskazówka do b): $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$, a funkcja charakterystyczna rozkładu $N(0, 1)$ to $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

4. Niech $((X_t, Y_t))_{t \geq 0}$ będzie rozwiązaniem układu równań stochastycznych

$$\begin{cases} dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt - Y_t dB_t, \\ dY_t = -\frac{1}{2}Y_t dt + X_t dB_t, \end{cases}$$

z warunkami początkowymi $X_0 = Y_0 = 1/\sqrt{2}$.

- a) (4p.) Wyznaczyć równanie stochastyczne spełniane przez proces $R_t = X_t^2 + Y_t^2$, $t \geq 0$.
Wynioskować stąd, że (X, Y) przyjmuje wartości na okręgu jednostkowym.
b) (6p.) Niech $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t = 0\}$. Obliczyć $\mathbb{E}\tau$.

Wskazówka do b): korzystając z a), zapisać wszystko w języku Y .

5. Załóżmy, że (X, Y) jest dyfuzją w $\mathbb{R}^2$ o generatorze spełniającym warunek

$$Af = \frac{1}{2}\Delta f + \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{dla } f \in C_{zw}^2(\mathbb{R}^2).$$

Niech $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 > -1\}$ oraz $\tau = \inf\{t \geq 0 : (X_t, Y_t) \notin D\}$.

- a) (3p.) Sformułować zagadnienie Dirichleta związane z $\mathbb{E}_{x,y} [\int_0^\tau (Y_t^2 + \frac{1}{4}) dt]$, $(x, y) \in D$.
b) (3p.) Wyznaczyć jawny wzór na rozwiązanie u zagadnienia w a).
c) (6p.) Używając metod martyngałowych, dowieść, że $u(x, y) = \mathbb{E}_{x,y} [\int_0^\tau (Y_t^2 + \frac{1}{4}) dt]$, $(x, y) \in D$.

Wskazówka do b): pokombinować z funkcją $(x - y^2)^2$.