

Kolokwium z Procesów Stochastycznych, 28 kwietnia 2026 r.

Czas trwania: 180 minut.

1. Niech $(B_t)_{t \geq 0}$ będzie jednowymiarowym procesem Wienera, a $(N_t)_{t \geq 0}$ - niezależnym procesem Poissona z parametrem 3, $B_0 = N_0 = 0$ p.n. Obliczyć $\mathbb{E}(B_3 - B_2 + B_1 N_1)^2$ oraz granicę $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_{2t}}{N_t}$ w sensie zbieżności prawie na pewno.

2. System - centrum obsługi - składa się z dwóch serwerów, z których każdy pracuje z wydajnością intensywnością dwóch klientów na godzinę. Maksymalna pojemność systemu wynosi trzech klientów: dwóch przy stanowiskach obsługi plus jeden w kolejce. Zakładamy, że klienci przychodzą zgodnie z procesem Poissona z intensywnością trzy na godzinę; w przypadku, gdy system jest pełny, klienci są odrzucani. W chwili początkowej system jest pusty.

a) Podać model systemu przy użyciu ciągłego łańcucha Markowa na $\{0, 1, 2, 3\}$ oraz napisać równania Kołmogorowa w tył dla p_{00} oraz p_{21} .

b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w chwili pojawienia się drugiego klienta system będzie pusty?

3. Rozważamy jednorodny ciągły łańcuch Markowa X na $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ o q -macierzy

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

a) Czy łańcuch jest powracający?

b) Obliczyć średni czas oczekiwania na powrót łańcucha do 0.

c) Załóżmy, że $X_0 = 2$. Ile razy średnio X odwiedzi stan 1, zanim dojdzie do 0?

4. Załóżmy, że $(B_t)_{t \geq 0}$ jest jednowymiarowym procesem Wienera, $B_0 = 0$ p.n.

a) Wykazać, że $X_t = e^{B_t}$, $t \geq 0$, jest jednorodnym procesem Markowa i wyznaczyć jego funkcję przejścia.

b) Niech A oznacza generator rodziny Markowa stowarzyszonej z X . Wyznaczyć Af dla $f \in C_{zw}^2(\mathbb{R}_+)$.

5. Załóżmy, że $(B_t)_{t \geq 0}$ jest jednowymiarowym procesem Wienera, $B_0 = 0$ p.n. Dla zadanego $t > 0$ określmy $d_t = \inf\{s \geq t : B_s = 0\}$. Wyznaczyć gęstość dwuwymiarowej zmiennej (B_1, d_1) .

6. Dany jest mocny proces Markowa X na $E = \mathbb{R}$, o ciągłych trajektoriach. Generator A stowarzyszonej rodziny Markowa spełnia warunek

$$Af(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \text{ oraz } f \in C_{zw}^2(\mathbb{R}).$$

Niech $\tau = \inf\{t : |X_t| = 1\}$. Obliczyć $\mathbb{E}_0 \tau$, $\mathbb{P}_0(X_\tau = 1)$ oraz $\mathbb{E}_0 X_{\tau+1}$.