Metodyka Nauczania Rachunku Prawdopodobieństwa,
kolokwium, 26.04.2024, grupa B

Czas trwania: 180 minut. Proszę pamiętać o podpisaniu prac oraz zaznaczeniu grupy.

1. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ losujemy ze zwracaniem r razy po jednym elemencie (zakładamy, że $n \geq 2$ i $r \geq 3$). Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia {co najmniej dwa razy wylosowano liczbę 1 oraz co najmniej raz wylosowano liczbę 2}.

2. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym rzucie wypadła czwórka, jeśli wiadomo, że
a) w 10 rzutach wypadło łącznie dokładnie 5 czwórek;
b) w 9 następnych rzutach wypadło dokładnie 5 czwórek.

3. Z odcinka $[0, 8]$ wybrano dwa punkty. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że środek odcinka, który tworzą te dwa punkty, jest zawarty w $[2, 4]$.

4. Rzucono n kostkami do gry. Określmy zdarzenia A_k - na k-tej kostce wypadła szóstka, $1 \leq k \leq n$, oraz A_{n+1} - suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 6. Wykazać, że dowolne n spośród zdarzeń A_1, A_2, ..., A_{n+1} jest niezależnych, ale łącznie zdarzenia A_1, A_2, ..., A_{n+1} nie są niezależne.

5. Test na rzadką chorobę, którą dotknięte jest 0.04% populacji, daje fałszywą pozytywną odpowiedź u osoby zdrowej w 1% przypadków, a u osoby chorej zawsze daje pozytywny wynik. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba, u której wynik testu był pozytywny, jest faktycznie chora?

6. Rzucamy monetą dopóki nie wypadną dwie reszki z rzędu. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że rzucimy dokładnie 2604 razy.

7. Z pudełka zawierającego 2604 białe kule i 2605 czarnych kul losujemy bez zwracania 2024 kule. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych będzie nieparzysta liczba czarnych kul.

Uwaga: Wynik należy wyrazić zwartym wzorem.

8. Dla zadanej liczby całkowitej dodatniej n, wyznaczyć liczbę permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ spełniających następujące warunki:

· liczby 1, 3, ..., $2n - 1$ występują w permutacji w porządku rosnącym;
· liczby 2, 4, ..., $2n$ występują w permutacji w porządku rosnącym;
· dla każdego $1 \leq j \leq n$, liczba $2j - 1$ stoi przed $2j$ (niekoniecznie bezpośrednio).

Na przykład, dla $n = 3$ permutacja 132456 spełnia powyższe warunki.