Metodyka Nauczania Rachunku Prawdopodobieństwa, kolokwium, 28.04.2023

Szkice rozwiązań

1. Wykazać, że dla dowolnych zdarzeń A, B, C spełniających warunki $\mathbb{P}(A' \cup B) = \frac{9}{10}$ oraz $B \subseteq C$, zachodzi nierówność $\mathbb{P}(A \cap C') \leq \frac{1}{10}$. Czy stałą $\frac{1}{10}$ można poprawić?

Rozwiązanie. Mamy $C' \subseteq B'$, a zatem

$$\frac{9}{10} = \mathbb{P}(A' \cup B) = 1 - \mathbb{P}((A' \cup B)') = 1 - \mathbb{P}(A \cap B') \leq 1 - \mathbb{P}(A \cap C'),$$

skąd wynika żądana nierówność. Gdy $B = C$, w powyższym ciągu występują wyłącznie równości, więc stałej $1/10$ nie można poprawić.

2. Ile jest podzbiorów zbioru $\{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_m, c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, zawierających co najmniej jeden element „a" oraz co najmniej jeden element „b"?

Rozwiązanie: Aby stworzyć podzbiór jak w zadaniu, musimy wybrać niepusty podzbiór zbioru $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ (na $2^k - 1$ sposobów), dołożyć do niego niepusty podzbiór zbioru $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ (na $2^m - 1$ sposobów) oraz dołożyć dowolny pozdbiór $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ (na 2^n sposobów). Stąd odpowiedź:

$$(2^k - 1)(2^m - 1) \cdot 2^n = 2^{k+m+n} - 2^{k+n} - 2^{m+n} + 2^n.$$

Uwaga: Zadanie można rozwiązać używając wzoru włączeń i wyłączeń, przez obliczenie, ile jest podzbiorów, które nie spełniają warunków zadania. Takie „złe" podzbiory muszą nie zawierać elementów „a" lub nie zawierać elementów „b". Liczba pozdbiorów niezawierających „a" wynosi 2^{m+n}; podobnie, liczba podzbiorów niezawierających „b" wynosi 2^{k+n}; wreszcie, liczba podzbiorów niezawierających ani „a", ani „b" jest równa 2^n. Stąd liczba „złych" podzbiorów wynosi

$$2^{m+n} + 2^{k+n} - 2^n,$$

pozostaje odjąć tę liczbę od liczby wszystkich podzbiorów zbioru

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_m, c_1, c_2, \ldots, c_n\}$$

(czyli od 2^{k+m+n}).

3. Na odcinku AB umieszczono w sposób losowy punkty C oraz D. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że z punktu C jest bliżej do D niż do A, oraz z punktu D jest bliżej do C niż do B.

Rozwiązanie: Bez straty ogólności możemy utożsamić odcinek AB z przedziałem $[0, 1]$. Wówczas losujemy dwie liczby C, D z tego przedziału, a więc przestrzenią probabilistyczną jest kwadrat $[0, 1]^2$ wyposażony w podzbiory borelowskie i prawdopodobieństwo geometryczne. Oznaczmy badane zdarzenie przez F. Wyróżniamy dwie możliwości:

1° Mamy $D \leq C$. Wówczas warunki zadania są spełnione (tzn. $(C, D) \in F$). Warunek $D \leq C$ wycina z kwadratu $[0, 1]^2$ trójkąt o polu $1/2$.

2° Mamy $C < D$. Wówczas warunek definiujący badane zdarzenie F jest równoważny nierównościom $D - C < C$ oraz $D - C \leq 1 - D$. Bezpośrednio sprawdzamy, iż te nierówności (wraz z zakładanym warunkiem $C < D$) wycinają z kwadratu $[0, 1]^2$ trójkąt o polu $1/6$.

Stąd szukane prawdopodobieństwo wynosi $1/2 + 1/6 = 2/3$.

Uwaga: Częstym błędem było pominięcie przypadku 1°. Proszę zauważyć, iż nie możemy w żadnym razie skorzystać z symetrii punktów C i D, przyjmując, że C leży „na lewo" od D. Role C i D *nie są symetryczne.*

4. Z talii 52 kart losujemy pięć razy po jednej karcie bez zwracania. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wylosowano trzy dwójki lub co najmniej jednego asa, jeśli wiadomo, że nie wyciągnięto żadnego pika.

Rozwiązanie: Wiemy, że nie wyciągnięto pika; możemy więc przejść do „zredukowanego eksperymentu", w którym losujemy pięć kart z talii 39 kart, złożonej z 13 kierów, 13 kar oraz 13 trefli. W ten sposób kontekst warunkowy przekształca się w bezwarunkowy: jako przestrzeń probabilistyczną bierzemy zbiór wszystkich pięcioelementowych kombinacji wspomnianej „zubożonej" talii kart, z klasą wszystkich podzbiorów jako σ-ciałem oraz prawdopodobieństwem klasycznym. Oznaczmy A - wylosowano trzy dwójki, B - wylosowano co najmniej jednego asa. Mamy

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap B') + \mathbb{P}(B).$$

Bezpośrednio liczymy, że

$$\mathbb{P}(A \cap B') = \frac{\binom{3}{3}\binom{33}{2}}{\binom{39}{5}}$$

(wybieramy trzy dwójki z trzech oraz pozostałe dwie karty z 33 nie-pików, nie-dwójek i nie-asów) oraz

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B') = 1 - \frac{\binom{36}{5}}{\binom{39}{5}}$$

(wybieramy pięć kart spośród nie-pików i nie-asów).

Uwaga. Zadanie można również rozwiązać poprzez rozważenie wszystkich możliwości: mamy

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup B_1) + \mathbb{P}(A \cup B_2) + \mathbb{P}(A \cup B_3),$$

gdzie B_j to zdarzenie „wylosowano dokładnie j asów". Oczywiście, ostatnie prawdopodobieństwo wyżej wynosi zero, wystarczy obliczyć pierwsze dwa.

5. W urnie znajduje się 10 monet. Prawdopodobieństwo wyrzucenia orła na j-tej monecie wynosi $j/10$, $j = 1, 2, \ldots, 10$. Losujemy monetę, a następnie wykonujemy nią trzy rzuty.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w drugim rzucie uzyskamy orła?

b) Załóżmy, że w drugim rzucie uzyskano orła. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pozostałych dwóch rzutach uzyskano orła i reszkę?

Rozwiązanie: Mamy do czynienia z doświadczeniem czteroetapowym: w pierwszym etapie losujemy monetę, kolejne etapy wiążą się z poszczególnymi rzutami tą monetą. Wprowadźmy zdarzenia H_j - wylosowano j-tą monetę ($j = 1, 2, \ldots, 10$), A - w drugim rzucie uzyskano orła, B - w pierwszym i trzecim rzucie uzyskano różne wyniki. Zdarzenia H_1, H_2, …, H_{10} tworzą rozbicie i mają dodatnie prawdopodobieństwa.

a) Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite mamy

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{10} \mathbb{P}(A|H_j)\mathbb{P}(H_j) = \sum_{j=1}^{10} \frac{j}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{11}{20}.$$

b) Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe, $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(A) = 20\mathbb{P}(A \cap B)/11$. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, dostajemy

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \sum_{j=1}^{10} \mathbb{P}(A \cap B|H_j)\mathbb{P}(H_j) = \sum_{j=1}^{10} 2 \cdot \frac{j}{10} \cdot \frac{j}{10} \cdot \frac{10-j}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0.165$$

(prawdopodobieństwo $\mathbb{P}(A \cap B|H_j)$ liczymy wprost: wiemy, że rzucamy j-tą kostką, i musimy uzyskać - w kolejnych trzech rzutach - orła, orła i reszkę, albo reszkę, orła i orła, odpowiednio; te dwa scenariusze są tak samo prawdopodobne, stąd dwójka pod powyższą sumą). Wstawiając, szukane prawdopodobieństwo $\mathbb{P}(B|A)$ wynosi 0.3.

6. Z urny zawierającej 1000 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 1000 losujemy 100 razy po jednej kuli ze zwracaniem, a następnie numery wszystkich wyciągniętych kul ustawiamy w niemalejący ciąg (o stu wyrazach). Jakie jest prawdopodobieństwo, że na ostatnim miejscu w tym ciągu stoi liczba 100?

Rozwiązanie: Jako przestrzeń probabilistyczną bierzemy

$$\Omega = \big\{(a_1, a_2, \ldots, a_{100}) \,:\, a_j \in \{1, 2, \ldots, 1000\}\big\},$$

wyposażoną w σ-ciało wszystkich podzbiorów oraz prawdopodobieństwo klasyczne. Kluczowe dla rozwiązania jest wprowadzenie zdarzeń A - wszystkie liczby a_j są nie większe niż 100 oraz B - wszystkie liczby a_j są nie większe niż 99. Interesujące nas zdarzenie to $A \setminus B$. Ponieważ $B \subseteq A$, to

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = \frac{|A| - |B|}{|\Omega|} = \frac{100^{100} - 99^{100}}{1000^{100}}.$$

Uwaga. Częstym błędem było wprowadzenie innej przestrzeni zdarzeń elementarnych,

$$\Omega = \big\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,:\, a_j \in \{1, 2, \ldots, 1000\},\, a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{100}\big\}$$

(jest to ta sama Ω co wyżej, tyle że dokładamy dodatkowo warunek na monotoniczność ciągu $(a_j)_{j=1}^{100}$). Proszę zauważyć, wybór prawdopodobieństwa klasycznego nie jest tu dobrym pmysłem: na przykład, ciąg stały złożony z samych jedynek może być zrealizowany tylko w przypadku, gdy we wszystkich losowaniach wyciągnięto kulę z numerem 1; natomiast jakikolwiek ciąg różnowartościowy jest 100! razy bardziej prawdopodobny: istotnie, konkretna konfiguracja numerów może być zrealizowa na 100! sposobów - nie ma tu znaczenia, w których losowaniach uzyskano konkretne kule.

7. Na n kartonikach zapisano n różnych liczb rzeczywistych. Kartoniki włożono do pudełka, starannie wymieszano, a następnie losowano kolejno bez zwracania. Niech A_k oznacza zdarzenie $\{k$-ta wylosowana liczba jest większa od poprzedniej$\}$, $k = 2, 3, \ldots$. Rozstrzygnąć, czy zdarzenia A_2, A_3, $\ldots$, A_n są niezależne.

Rozwiązanie: Bez straty ogólności możemy przyjąć, że liczby na kartonikach to 1, 2, $\ldots$, n, wówczas zadanie poświęcone jest własnościom permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Oznaczmy zbiór wszystkich takich permutacji przez Ω, połóżmy $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ i rozważmy prawdopodobieństwo klasyczne na Ω. Jak łatwo zauważyć, mamy $\mathbb{P}(A_k) = 1/2$, licząc albo bezpośrednio, albo wskazując bijekcję pomiędzy A_k i A'_k (przez transpozycję na miejscach k oraz $k-1$). Ale

$$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{|A_2 \cap A_3|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{3} \cdot 1 \cdot (n-3)!}{n!} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

(licznik: wybieramy trzy liczby, które mają stać na pierwszych trzech miejscach, porządkujemy je rosnąco na jeden sposób, pozostałe $n-3$ liczby umieszczamy dowolnie). Zatem $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) \neq \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$, a więc zdarzenia nie są niezależne.

8. Wyznaczyć liczbę wszystkich rosnących ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ liczb całkowitych spełniających $1 \leq a_1 \leq 2$ oraz $a_j \leq 2j$ dla wszystkich $j = 2, 3, \ldots, n-1$.

Rozwiązanie: Niech $b_j = a_j - j$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Przekształcenie to zadaje bijekcję między klasą ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ jak w zadaniu oraz klasą niemalejących ciągów $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$ spełniających warunki $0 \leq b_1 \leq 1$ oraz $b_j \leq j$ dla $j = 2, 3, \ldots, n-1$. Wykażemy, że ta ostatnia klasa ma moc równą C_n, n-tej liczbie Catalana. W tym celu, spójrzmy na dowolną ścieżkę Catalana, tzn. monotoniczną ścieżkę łączącą $(0,0)$ i (n,n), nieprzechodzącą powyżej diagonali (por. wykład). Dla każdej liczby $0 \leq j \leq n$, spójrzmy na „najwyższy punkt" postaci (j, c_j), leżący na ścieżce. Rzecz jasna, mamy $c_0 = 0$ oraz $c_n = n$; co kluczowe, każda ścieżka jest *w jednoznaczny sposób zadana przez podanie ciągu* $(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$. Pozostaje już tylko zauważyć, że ciąg ten musi spełniać te same warunki co ciąg b_1, b_2, …, b_{n-1}; i w drugą stronę, każdy ciąg $(b_j)_{j=1}^{n-1}$ jak wyżej prowadzi do pewnej ścieżki Catalana.