MNRP, kolokwium 26 kwietnia 2024 r., rozwiązania

Poniższy tekst zawiera rozwiązania zadań dla grupy A, rozwiązania dla grupy B są podobne. Przy każdym zadaniu, na końcu umieściłem listę typowych błędów.

1. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ losujemy ze zwracaniem r razy po jednym elemencie (zakładamy, że $n \geq 2$ i $r \geq 3$). Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia {co najmniej raz wylosowano liczbę 1 oraz co najmniej dwa razy wylosowano liczbę 2}.

Rozwiązanie. Rozpoczynamy od opisu przestrzeni probabilistycznej: kładziemy

$$\Omega = \{1, 2, \dots, n\}^r, \qquad \mathcal{F} = 2^\Omega$$

i jako $\mathbb{P}$ bierzemy prawdopodobieństwo klasyczne. Oznaczmy $A =$ {co najmniej raz wylosowano liczbę 1} oraz $B =$ {co najmniej dwa razy wylosowano liczbę 2}. Mamy $\mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(A' \cup B')$ oraz

$$\mathbb{P}(A' \cup B') = \mathbb{P}(A') + \mathbb{P}(B') - \mathbb{P}(A' \cap B').$$

Liczymy bezpośrednio, iż

$$\mathbb{P}(A') = \frac{|\text{ani razu nie wylosowano } 1|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)^r}{n^r}$$

oraz podobnie

$$\mathbb{P}(B') = \frac{|\text{liczba 2 pojawiła się co najwyżej raz}|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)^r + r \cdot (n-1)^{r-1}}{n^r},$$

$$\mathbb{P}(A' \cap B') = \frac{(n-2)^r + r \cdot (n-2)^{r-1}}{n^r}.$$

(na przykład, szansa na uzyskanie dokładnie jednej dwójki wynosi $r \cdot (n-1)^{r-1}/n^r$: na r sposobów wybieramy miejsce dla dwójki, a na każdej z pozostałych $r-1$ pozycji mamy $n-1$ możliwości).

Stąd ostatecznie

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \frac{(n-1)^r}{n^r} - \frac{(n-1)^r + r \cdot (n-1)^{r-1}}{n^r} + \frac{(n-2)^r + r \cdot (n-2)^{r-1}}{n^r}.$$

Typowe błędy:
- brak opisu przestrzeni probabilistycznej;
- nieprawidłowy model kombinatoryczny;
- pomyłki w rozważaniach kombinatorycznych;
- lakoniczny opis.

2. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym rzucie wypadła szóstka, jeśli wiadomo, że
a) w 10 rzutach wypadło łącznie dokładnie 7 szóstek;
b) w 9 następnych rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek.

Rozwiązanie. Przestrzeń probabilistyczna dana jest poprzez

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{10}, \qquad \mathcal{F} = 2^\Omega,$$

a $\mathbb{P}$ jest prawdopodobieństwem klasycznym. Oznaczmy $A =$ {w pierwszym rzucie wypadła szóstka}, $B =$ {w 10 rzutach wypadło łącznie dokładnie 7 szóstek}, $C =$ {w 9 ostatnich rzutach wypadło dokładnie 7 szóstek}.

a) Ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Mamy $|A \cap B| = \binom{9}{6} \cdot 5^3$: istotnie, musi być szóstka na pierwszej pozycji oraz sześć szóstek na ostatnich dziewięciu pozycjach. Wybieramy więc sześć miejsc na szóstki, a na pozostałych trzech mamy 5^3 możliwości. Podobnie rozumując, widzimy, iż $|B| = \binom{10}{7} \cdot 5^3$. Tak więc

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\binom{9}{6}}{\binom{10}{7}}.$$

b) Argumentując jak wyżej,

$$\mathbb{P}(A|C) = \frac{|A \cap C|}{|C|} = \frac{\binom{9}{7}5^2}{6 \cdot \binom{9}{7}5^2} = \frac{1}{6}.$$

Uwaga. Podpunkt a) można rozwiązać inaczej, patrząc wyłącznie na zachowanie miejsc, na których stoją szóstki (w ten sposób bezpośrednio identyfikujemy prawdopodobieństwo warunkowe). Bierzemy

$$\Omega = \{\text{kombinacje 7-elementowe zbioru } \{1, 2, \ldots, 10\}\}, \qquad \mathcal{F} = 2^{\Omega},$$

a jako $\mathbb{P}$ kładziemy prawdopodobieństwo klasyczne. Wówczas odpowiedź wynosi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{9}{6}}{\binom{10}{7}}.$$

Istotnie: licząc $|A|$, interesują nas te kombinacje 7-elementowe, które zawierają 1. Określamy je, biorąc 1 oraz dokładając sześcioelementowy podzbiór zbioru $\{2, 3, \ldots, 10\}$.

Typowe błędy:
- brak opisu przestrzeni probabilistycznej;
- niezależność doświadczeń nie jest pojęciem matematycznym;
- pomyłki w rozważaniach kombinatorycznych;
- lakoniczny opis.

3. Z odcinka $[0, 10]$ wybrano dwa punkty. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że środek odcinka, który tworzą te dwa punkty, jest zawarty w $[1, 3]$.

Rozwiązanie. Jako przestrzeń probabilistyczną bierzemy $\Omega = [0, 10]^2$ wraz z podzbiorami borelowskimi $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ i prawdopodobieństwem geometrycznym $\mathbb{P}$. Interesuje nas prawdopodobieństwo zdarzenia

$$A = \left\{(x, y) \in \Omega \, : \, 1 \leq \frac{x+y}{2} \leq 3\right\}.$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że A jest trapezem o polu 16. Stąd $\mathbb{P}(A) = 16/100$.

Typowe błędy:
- brak opisu przestrzeni probabilistycznej;
- zamiast $x + y$, wzięcie $y - x$ lub $x - y$;

4. Rzucono n kostkami do gry. Określmy zdarzenia A_k - na k-tej kostce wypadła szóstka, $1 \leq k \leq n$, oraz A_{n+1} - suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 6.

Wykazać, że dowolne n spośród zdarzeń A_1, A_2, ..., A_{n+1} jest niezależnych, ale łącznie zdarzenia A_1, A_2, ..., A_{n+1} nie są niezależne.

Rozwiązanie. Eksperyment modelujemy za pomocą przestrzeni probabilistycznej

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^n, \qquad \mathcal{F} = 2^\Omega$$

i $\mathbb{P}$ będącego prawdopodobieństwem klasycznym. Zauważmy, że dla $1 \leq j \leq n$ mamy $|A_j| = 6^{n-1}\cdot 1$, skąd $\mathbb{P}(A_j) = 1/6$. Ponadto, zachodzi również $\mathbb{P}(A_{n+1}) = 1/6$. Istotnie, załóżmy, że ustalimy sobie ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ o wyrazach w zbiorze $\{1,2,3,4,5,6\}$. Wówczas istnieje dokładnie jedna liczba $a_n \in \{1,2,3,4,5,6\}$ (jedna na sześć możliwych) taka, że $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_{n+1}$: innymi słowy, zbiór A_{n+1} wyczerpuje dokładnie $1/6$ całej Ω.

Wykażemy teraz, że zdarzenia A_1, A_2, ..., A_{n+1} nie są niezależne. Gdyby zachodziła niezależność, to mielibyśmy

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap A'_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A'_{n+1})$$

(bierzemy zdarzenia A_1, A_2, ..., A_n oraz przeciwne do A_{n+1}). Równość ta nie ma jednak miejsca: lewa strona jest równa zero, zaś prawa jest liczbą dodatnią.

Przejdźmy teraz do niezależności dowolnych n zdarzeń spośród A_1, A_2, ..., A_{n+1}. Wystarczy wykazać, że dla dowolnego ciągu $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n+1$, gdzie $1 \leq k \leq n$, mamy

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2})\ldots\mathbb{P}(A_{i_k}). \tag{1}$$

Rozważmy dwa przypadki. Jeśli $i_k \neq n+1$, to równość zachodzi: mamy

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = 6^{n-k},$$

gdyż w rzutach o numerach i_1, i_2, ..., i_k wypadły szóstki, a w każdym z pozostałych $n-k$ rzutów mamy 6 możliwości. Pozostaje więc rozpatrzyć przypadek $i_k = n+1$. Istnieje wówczas liczba $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ niebędąca elementem ciągu i_1, i_2, ..., i_k. Rozumujemy jak wyżej: weźmy dowolny ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ taki, że $a_{i_m} = 6$ dla $m = 1, 2, \ldots, k-1$. Wówczas istnieje dokładnie jeden wybór dla a_j tak, by pełny ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ należał do $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ (jest to taki wybór, dla którego suma wszystkich wyrazów dzieli się przez 6). Zatem

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = 1^{k-1} \cdot 1 \cdot 6^{n-k},$$

gdyż mamy ustalone wartości odpowiadające miejscom i_1, i_2, ..., i_{k-1} oraz miejscu j, na pozostałych zaś mamy pełną dowolność. Wstawiając do (1), widzimy, iż tożsamość zachodzi. Wynika stąd teza zadania.

Uwaga. Niezależność można również było wykazać poprzez udowodnienie tożsamości

$$\mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1} \cap A_2^{\varepsilon_2} \cap \ldots A_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}}) = \mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1})\mathbb{P}(A_2^{\varepsilon_2})\ldots\mathbb{P}(A_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}}),$$

w której nie występuje zdarzenie o ustalonym indeksie j.

Typowe błędy:
- brak opisu przestrzeni probabilistycznej;
- niezależność doświadczeń nie jest pojęciem matematycznym;
- kłopoty z analizą A_{n+1} oraz przecięć wiążących to zdarzenie.

5. Test na rzadką chorobę, którą dotknięte jest 0.05% populacji, daje fałszywą pozytywną odpowiedź u osoby zdrowej w 2% przypadków, a u osoby chorej zawsze daje pozytywny wynik. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba, u której wynik testu był pozytywny, jest faktycznie chora?

Rozwiązanie. Wyróżnijmy zdarzenia $H_1 = \{$losowo wybrana osoba cierpi na chorobę, o której mowa w zadaniu$\}$, $H_2 = H_1'$ oraz $A = \{$otrzymano pozytywny wynik testu$\}$. Z warunków zadania wynika, że $\{H_1, H_2\}$ jest rozbiciem Ω oraz mamy $\mathbb{P}(H_1) = 0.05\%$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 1$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 2\%$. Są spełnione warunki wzoru Bayesa, otrzymujemy więc

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)} = \frac{0.05\% \cdot 1}{0.05\% \cdot 1 + 99.95\% \cdot 2\%}.$$

Typowe błędy:
- lakoniczny opis (często wręcz nieobecny);
- pomyłki we wzorze Bayesa.

6. Rzucamy monetą dopóki nie wypadną dwa orły z rzędu. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że rzucimy dokładnie 2024 razy.

Rozwiązanie. Dla $n \geq 1$, oznaczmy przez a_n (odpowiednio, b_n) liczbę ciągów o wyrazach $\{O, R\}$, niezawierajacych dwóch wyrazów O z rzędu, kończących się na O (odpowiednio, na R). Mamy $a_1 = b_1 = 1$ i zachodzi rekurencja

$$a_{n+1} = b_n, \qquad b_{n+1} = a_n + b_n, \qquad n \geq 1,$$

którą sprawdzamy badając możliwości wyboru $n+1$-szego wyrazu ciągu. Zatem $a_2 = 1$ i

$$a_{n+2} = b_{n+1} = a_n + b_n = a_n + a_{n+1}.$$

Zatem $(a_n)_{n\geq 1}$ jest ciągiem Fibonacciego. Bezpośrednio liczymy, iż

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

W zadaniu interesuje nas liczba tych ciągów, w których pierwszy podciąg OO pojawił się na 2023 oraz 2024 miejscu: jest ona równa a_{2023}.

Pozostaje uwzględnić prawdopodobieństwo. Bierzemy przestrzeń $\Omega = \{O, R\}^{2024}$ z pełnym σ-ciałem i prawdopodobieństwem klasycznym. Odpowiedź w zadaniu to $a_{2023}/2^{2024}$.

Typowe błędy:
- brak opisu przestrzeni probabilistycznej;
- błędny model kombinatoryczny;

7. Z pudełka zawierającego 2024 białe kule i 2025 czarnych kul losujemy bez zwracania 1000 kul. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych będzie nieparzysta liczba białych kul.

Uwaga: Wynik należy wyrazić zwartym wzorem.

Rozwiązanie. Numerujemy kule: B_1, B_2, ..., B_{2024} oraz C_1, C_2, ..., C_{2025}, a następnie wprowadzamy przestrzeń

$$\Omega = \Big\{\text{kombinacje 1000-elementowe zbioru } \{B_1, B_2, \ldots, B_{2024}, C_1, C_2, \ldots, C_{2025}\}\Big\},$$

$\mathcal{F} = 2^\Omega$ i bierzemy prawdopodobieństwo klasyczne $\mathbb{P}$. Niech $A = \{$wśród wylosowanych kul jest nieparzysta liczba białych$\}$. Mamy

$$|A| = \binom{2024}{1}\binom{2025}{999} + \binom{2024}{3}\binom{2025}{997} + \ldots + \binom{2024}{999}\binom{2025}{1}.$$

Zwiniemy teraz tę sumę. Spójrzmy najpierw na *pełną* sumę

$$\binom{2024}{0}\binom{2025}{1000} + \binom{2024}{1}\binom{2025}{999} + \binom{2024}{2}\binom{2025}{998} + \binom{2024}{3}\binom{2025}{997} + \ldots + \binom{2024}{999}\binom{2025}{1} + \binom{2024}{1000}\binom{2025}{0}.$$

Tę pełną sumę łatwo policzyć: na przykład, jest to współczynnik przy x^{1000} w wielomianie $(1+x)^{2024}(1+x)^{2025} = (1+x)^{4049}$ (por. skrypt, str. 8), czyli $\binom{4049}{1000}$. Aby „wyciąć" z tej sumy wyrazy czerwone, spójrzmy na alternującą wersję

$$\binom{2024}{0}\binom{2025}{1000} - \binom{2024}{1}\binom{2025}{999} + \binom{2024}{2}\binom{2025}{998} - \binom{2024}{3}\binom{2025}{997} + \ldots - \binom{2024}{999}\binom{2025}{1} + \binom{2024}{1000}\binom{2025}{0},$$

w której wszystkie czarne wyrazy mają znak minus. Ta zmodyfikowana suma to współczynnik przy x^{1000} w wielomianie $(1-x)^{2024}(1+x)^{2025} = (1-x^2)^{2024}(1+x)$, który wynosi $\binom{2024}{500}$. Wobec tego, $|A| = (\binom{4049}{1000} - \binom{2024}{500})/2$ i

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{4049}{1000} - \binom{2024}{500}}{2\binom{4049}{1000}}.$$

Typowe błędy:

- za doprowadzenie do

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\sum_{j \text{ nieparzyste}} \binom{2024}{j}\binom{2025}{1000-j}}{\binom{4049}{1000}}$$

przyznawano 1 punkt. Główna trudność w zadaniu polegała na zwinięciu tej sumy.

8. Dla zadanej liczby całkowitej dodatniej n, wyznaczyć liczbę permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ spełniających następujące warunki:

· liczby 1, 3, ..., $2n-1$ występują w permutacji w porządku rosnącym;
· liczby 2, 4, ..., $2n$ występują w permutacji w porządku rosnącym;
· dla każdego $1 \leq j \leq n$, liczba $2j-1$ stoi przed $2j$ (niekoniecznie bezpośrednio).

Na przykład, dla $n = 3$ permutacja 132456 spełnia powyższe warunki.

Rozwiązanie. Odpowiedź w zadaniu to C_n, n-ta liczba Catalana. Oto bijekcja między zbiorem permutacji z zadania a zbiorem wszystkich ścieżek monotonicznych łączących $(0,0)$ z (n,n) (por. wykład). Mając daną permutację $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2n})$, jeśli σ_j jest liczbą nieparzystą, to w j-tym kroku idziemy o 1 w prawo; jeśli σ_j jest liczbą parzystą, to w j-tym kroku idziemy w górę. Warunek monotoniczności ze względu na 1, 3, ..., $2n-1$ oraz 2, 4, 6, ..., $2n$ gwarantuje, iż otrzymana monotoniczna ścieżka jest kodowana w jednoznaczny sposób. Warunek, iż $2j-1$ stoi przed $2j$ zapewnia, iż j-ty krok w górę następuje po j-tym kroku w prawo, czyli ścieżka nie wychodzi powyżej diagonali $\{(x,y) : y = x\}$. Pozostaje już tylko zauważyć, iż każdą ścieżkę Catalana można uzyskać za pomocą odpowiedniej permutacji, kodując ruch "prawo", "góra" za pomocą odpowiedniej liczby w permutacji.

Typowe błędy:

- błędny model kombinatoryczny;
- niepełne wyjaśnienia, iż odpowiednia bijekcja rzeczywiście jest bijekcją.