

Funkcje Analityczne - seria 1

1. Wykazać, że dowolną homografię $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (gdzie $ad-bc \neq 0$), można przedstawić w postaci złożenia przekształceń afinicznych typu $z \mapsto Az+B$ oraz inwersji $z \mapsto z^{-1}$.

2. (i) Wykazać, że jeżeli każda homografia jest bijekcją rozszerzonej płaszczyzny zespolonej $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

(ii) Wykazać, że homografie tworzą grupę ze względu na składanie.

3. Wykazać, że obrazem okręgu lub prostej przy homografii jest okrąg lub prosta. Udowodnić, że jeśli S jest zadanym okręgiem bądź prostą, oraz T jest zadanym okręgiem lub prostą, to istnieje homografia przeprowadzająca S na T .

4. Wyznaczyć

(i) obraz prostej $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 1\}$ przy homografii $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

(ii) obraz okręgu $\{z \in \mathbb{C} : |z - (2+i)| = 1\}$ przy homografii $h(z) = \frac{2z+1}{z-(1+i)}$.

5. Dla czwórki parami różnych punktów $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \overline{\mathbb{C}}$, określamy ich *dwustosunek* jako

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}.$$

(i) Wykazać, że homografie zachowują dwustosunek: jeśli h jest homografią, to

$$(h(z_1), h(z_2); h(z_3), h(z_4)) = (z_1, z_2; z_3, z_4).$$

(ii) Wykazać, że jeśli (z_1, z_2, z_3) oraz (w_1, w_2, w_3) są dwiema trójkami parami różnych punktów rozszerzonej płaszczyzny zespolonej $\overline{\mathbb{C}}$, to istnieje dokładnie jedna homografia h taka, że $h(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$.

(iii) Wykazać, że jeśli $(z_1, z_2; z_3, z_4) = (w_1, w_2; w_3, w_4)$, to istnieje homografia h przeprowadzająca czwórkę punktów (z_1, z_2, z_3, z_4) na czwórkę (w_1, w_2, w_3, w_4) .

6. Wyznaczyć homografię, która przeprowadza obszar zawarty pomiędzy okręgami $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ oraz $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$ na obszar $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1\}$.