

## Elementy Analizy Matematycznej 2007/2008, ćwiczenia trzynaste

### 1. Obliczyć całki

a)  $\int 2x + 6x^2 + x^4 dx$

b)  $\int x(1 + x^2)^4 dx$

c)  $\int \frac{1}{2 + 3x^2} dx$

d)  $\frac{x}{(x+1)(x-2)}$

e)  $\int_0^1 x^2 \sqrt{x^3 - 1} dx$

f)  $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$

g)  $\int_0^\pi x \sin 2x dx$

h)  $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{1 + e^x} dx.$

2. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez wykresy funkcji  $f(x) = x \sin x$  i  $g(x) = (x - \frac{\pi}{2})^2 - \frac{\pi^2}{4}$ .

### 3. Obliczyć całki niewłaściwe

a)  $\int_0^1 \frac{x}{1-x} dx$

b)  $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx.$

### 4. Obliczyć granicę ciągu $(a_n)$ , jeśli $a_n =$

a)  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$     b)  $\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2}.$

### 5. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) =$

a)  $\int_0^{x+1} e^t dt$

b)  $\int_1^{x^2} e^t dt$

c)  $\int_{x-1}^2 e^t dt$

d)  $\int_{x-1}^{x^2} e^t dt.$

6. Wykazać, że całka  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  jest zbieżna, a całka  $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$  jest rozbieżna.

### 7. Obliczyć całkę $\int_A f(x, y) dx dy$ , gdzie

a)  $f(x, y) = x^2 y$

$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\},$

b)  $f(x, y) = e^x + x \sin y$

$A = [0, 1] \times [0, \pi],$

c)  $f(x, y) = e^{-x} y$

$A = \{(x, y) : x \geq y^2\}.$