Elementy Analizy Matematycznej 2007/2008, ćwiczenia trzecie i czwarte

1. Wyznaczyć sumy szeregów.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+5}}{3^{n-3}}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nq^n,\ |q|<1$ ustalone.

2. Zbadać zbieżność szeregów.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^5}{5^n-3^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^7}{(-5)^n-3^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}+2n^5-1}{3n^{12}-14n+7}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin n}{n^2}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin n}{n}.$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2007^n}{\sqrt[10]{n!}}.$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{10000}}$ j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}.$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{1+3+3^2+\ldots+3^n}$ l) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-3)\sqrt{2n+1}}.$

3. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregów.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{2n+1}}{n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}+2n^5-1}{3n^{12}-14n+7}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin n}{n^2}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin n}{n}.$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-100000}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^n n-\sqrt{n}}.$

4. Rozstrzygnąć, dla jakich $x \in \mathbb{R}$ szereg jest zbieżny, a dla jakich zbieżny bezwzględnie.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{5^{2n}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{n+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^5}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$.

5. Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podać przykład bądź udowodnić, iż taki ciąg nie istnieje)
a) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} a_n$ jest zbieżny?
b) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} a_n$ jest zbieżny?
c) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, a szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ są zbieżne?
d) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ są rozbieżne?
e) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ jest zbieżny?