**Elementy Analizy Matematycznej 2007/2008, ćwiczenia dziesiąte**

**1.** Niech $f(x,y) = x^y$ dla $x > 0$, $y > 0$. Dowieść, że nie można określić funkcji $f$ w punkcie $(0,0)$ tak, by była ona ciągła w tym punkcie.

**2.** Zbadać ciągłość odwzorowania $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ danego wzorem

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \left(\frac{xy}{1+z^2}, \frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}\right) & \text{jeśli } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ (0,0) & \text{jeśli } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

**3.** Definiujemy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{jeśli } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{jeśli } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Udowodnić, że obcięcie $f$ do dowolnej prostej przechodzącej przez punkt $(0,0)$ jest funkcją ciągłą, mimo iż funkcja $f$ nie jest ciągła w $(0,0)$.

**4.** Udowodnić, że część wspólna dowolnie wielu zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.

**5.** Niech

$$A = \{(x,y) : x + y < 10,\ 2x + y \geq 10,\ (x-6)^2 + (y-2)^2 \leq 100\}.$$

Zbadać, czy zbiór $A$ jest otwarty, domknięty, ograniczony, zwarty, wypukły. Wyznaczyć styczną do tego zbioru w punkcie $(12, -6)$.

**6.** Obliczyć gradient funkcji $f$ w punktach, w których istnieje, jeśli

a) $f(x,y) = 3x^2 + 5x \sin y$,

b) $f(x,y) = \dfrac{3x+y}{1+y^2}$,

c) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$,

d) $f(x,y) = e^{x^2 \operatorname{tg} y}$,

e) $f(x,y) = |x| y$,

f) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + \cos y + e^z + 1}$