

Elementy Analizy Matematycznej 2007/2008, ćwiczenia siódme

1. Wyznaczyć

- a) maksimum objętości stożka wpisanego w kulę o promieniu 1,
- b) minimum pola powierzchni walca o objętości 1,
- c) maksimum iloczynu dwóch liczb rzeczywistych o sumie 100,
- d) największy wyraz ciągu (a_n) danego wzorem $a_n = n^5 e^{-n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

2. W wycinek koła o promieniu 1 i kącie środkowym 45° wpisano prostokąt w ten sposób, że dwa wierzchołki leżą na jednym promieniu skrajnym, jeden wierzchołek na drugim promieniu skrajnym i jeden wierzchołek na łuku wycinka. Jakie są wymiary prostokąta o największym polu?

3. Jaki jest minimalny czas dojścia do domu stojącego przy prostoliniowej szosie w odległości 13 km od miejsca, w którym się znajdujemy, jeśli odległość od szosy wynosi 5 km, w terenie poruszamy się z prędkością 3 km/h, zaś po szosie - z prędkością 5 km/h?

4. Wykazać, że dla $x > 0$ zachodzą nierówności

$$\ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) < \frac{1}{x} + \ln x,$$

$$\sin x - x \cos x \leq \frac{x^3}{3}.$$

5. Obliczyć granicę

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{\sin^2(x - 1)}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x - x} - 1}{\ln \cos x}.$

6. Wyznaczyć przybliżoną wartość wyrażenia oraz oszacować błąd przybliżenia.

a) $\sqrt[3]{1001}$

b) $\ln(1,001)$

c) $\cos \frac{\pi}{100}$

d) $\arctg 1 \frac{3}{4}.$