Elementy Analizy Matematycznej 2007/2008, ćwiczenia jedenaste

1. Udowodnić, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{jeśli } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{jeśli } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest ciągła, ale nie jest różniczkowalna w $(0,0)$.

2. Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $f(x,y,z) = 0$ w punkcie p, jeśli

a) $f(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{2y} + \sqrt{3z} - 6$, $p = (1,2,3)$,
b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2yz$, $p = (1,1,-1)$.

3. Wyznaczyć kres górny i kres dolny funkcji f na zbiorze K, jeśli

a) $f(x,y) = xy^2$, $K = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 3\}$,
b) $f(x,y) = x^2 + xy$, $K == \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1.\}$,
c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x + y^2 + 2}$, $K = [-1,1] \times [-1,1]$.
d) $f(x,y) = ye^{-x^2+y}$, $K = \{(x,y) : y \geq x^2\}$

4. Narysować zbiory i zbadać, czy są domknięte, otwarte, ograniczone, zwarte, wypukłe.

a) $A = \{(x,y) : x^2 + y < 0,\ |x| + |y| < 2\}$,
b) $B = \{(x,y) : x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0,\ x^2 + 9y^2 = 4\}$,
c) $C = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$,
d) $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 4z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$,
e) $E = \{(x,y,z) : x^2 - y^2 < z,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.\}$,
f) $F = \{(x,y,z) : xy \leq 0,\ x^2 + z^2 \leq 1\}$,
g) $G = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 4,\ z^2 - x^2 - y^2 \leq 1\}$.

5. Udowodnić, że funkcja $(1 + e^y)\cos x - ye^y$ ma nieskończenie wiele maksimów lokalnych, choć nie ma żadnego minimum lokalnego.

6. Udowodnić, że funkcja $f(x,y) = (x - y^2)(3x - y^2)$ po obcięciu do dowolnej prostej przechodzącej przez $(0,0)$ ma minimum lokalne w $(0,0)$. Czy f ma minimum lokalne w $(0,0)$?