Elementy Analizy Matematycznej 2007/2008, ćwiczenia dziewiąte

1. Korzystając z wypunkłości bądź wklęsłości odpowiedniej funkcji, udowodnić, że

a) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}x < \sin x < x$ dla $0 < x < \dfrac{\pi}{3}$,

b) $\ln x < -1 + \ln 2 + \dfrac{1}{2}x$ dla $0 < x \neq 2$,

c) $(1+x)^a \leq 1 + ax$ dla $a \in (0,1)$ i $x > -1$.

2. Korzystając z wypukłości bądź wklęsłości odpowiedniej funkcji, udowodnić, że:

a) $\dfrac{1}{3}(x^{10} + y^{10} + z^{10}) \geq \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^{10}$.

b) $\cos\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \dfrac{1}{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$ dla $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha, \beta, \gamma < \dfrac{\pi}{2}$,

c) $x\ln x + 2y\ln y + 3z\ln z + (x+2y+3z)\ln 6 \geq (x+2y+3z)\ln(x+2y+3z)$ dla $x, y, z > 0$,

d) $\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c} \geq a^a b^b c^c > \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$ dla $a, b, c > 0$.

e) dla $a,\ b > 0$, $(2-\sqrt{3})a^{2+\sqrt{3}} + (2+\sqrt{3})b^{2-\sqrt{3}} \geq 4\sqrt[4]{ab}$.

Kiedy zachodzi równość?

3. Udowodnić, że

a) spośród stukątów opisanych na okręgu o promieniu 1 najmniejsze pole ma stukąt foremny.

b) spośród stukątów wpisanych w okrąg o promieniu 1 największe pole ma stukąt foremny