

Elementy Analizy Matematycznej 2007/2008, ćwiczenia piąte

1. Wyznaczyć granicę funkcji, o ile istnieje.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1},$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x},$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} e^{-1/x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 100x}{\sin x}$

g) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 - \pi^2}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x},$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+x+x^2}{e^x}$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x+1) - \sin x,$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$

l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[10]{x}}{\ln(x^{100})}$

2. Wyznaczyć funkcję odwrotną do f , jeśli istnieje.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}, \quad x \neq -2,$

b) $f(x) = e^{x^2}$

c) $f(x) = x^2, \quad x \in [0, 1],$

d) $f(x) = x^2, \quad x \in [-1, 1].$

3. Wyznaczyć liczbę a taką, żeby funkcja f była ciągła bądź udowodnić, że takie a nie istnieje, jeśli

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{jeśli } x \neq 0, \\ a & \text{jeśli } x = 0. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x^2-1} & \text{jeśli } x \neq 1, \\ a & \text{jeśli } x = 1. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{x} & \text{jeśli } x \neq 0, \\ a & \text{jeśli } x = 0. \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2^{1/x} & \text{jeśli } x \neq 0, \\ a & \text{jeśli } x = 0. \end{cases}$

4. Udowodnić, że równanie $e^x = 1 + 3x$ ma co najmniej 2 rozwiązania rzeczywiste.

5. Udowodnić, że każdy wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.