

## Elementy Analizy Matematycznej 2007/2008, ćwiczenia drugie

1. Obliczyć granicę ciągu  $(a_n)$ , jeśli  $a_n =$

a)  $\sqrt[n]{2^n + 3^n + 7^n}$

b)  $\frac{10^n}{n!}$

c)  $\frac{1 + 2 + 4 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 9 + \dots + 3^n}$

d)  $\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n}$

e)  $\frac{5^{2n} + 4^n \cdot n^{2007}}{25^n + n \ln(n + 1000)}$

g)  $\sqrt[n]{n!}$ .

2. Udowodnić, że ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny oraz rozstrzygnąć, czy jego granica jest skończona, czy nie, jeśli  $a_n =$

a)  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

b)  $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n + 1)}$

c)  $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$

d)  $\frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \dots + \frac{1}{2n}$ .

3. Ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny do granicy  $g$  (skończonej lub nie). Udowodnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = e^g.$$

4. Wyznaczyć granicę ciągu  $(a_n)$ , jeśli  $a_n =$

a)  $\left(\frac{2n + 7}{2n + 13}\right)^{n+5}$

b)  $\left(1 + \frac{\sin n}{n^2}\right)^n$ .

c)  $\left(1,00001 + \frac{1}{n}\right)^n$

d)  $\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$ .

5. Wyznaczyć granicę ciągu  $(a_n)$ , jeśli  $a_n =$

a)  $\frac{1}{n} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$

b)  $\frac{\ln n}{n}$

c)  $\frac{1^{10} + 2^{10} + \dots + n^{10}}{n^{11}}$

d)  $n \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}\right)$ .