Elementy Analizy Matematycznej 2007/2008, ćwiczenia pierwsze

1. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą równości

(i) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

(ii) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - a^{2n-3}b^3 + \ldots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$.

(iii) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

(iv) $1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + \ldots + n(n+1)^2 = \dfrac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$.

2. Udowodnić, że

(i) Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

(ii) Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 7$ zachodzi nierówność $30n < 2^n + 115$.

(iii) Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ i dowolnych liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0,\pi]$ zachodzi nierówność $|\sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)| \leq \sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n$.

(iv) Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ dzieli się przez 133.

(v) Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 6$ kwadrat (figurę geometryczną) można podzielić na n kwadratów.

3. Ciąg (a_n) spełnia warunek $a_{n+1} = qa_n + p$, $\quad n = 1, 2, \ldots$, gdzie p, q są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, niezależnymi od n. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$a_n = \frac{p}{1-q} + \left(a_1 - \frac{p}{1-q}\right) q^{n-1}.$$

W szczególności, jeśli $a_1 = \frac{p}{1-q}$, to ciąg (a_n) jest stały (i nazywany jest przez ekonomistów punktem równowagi równania $a_{n+1} = qa_n + p$).

4. Dowieść, że ciąg (a_n) jest zbieżny do 0 wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(|a_n|)$ zbiega do 0.

5. Udowodnić, że ciąg zbieżny do granicy skończonej jest ograniczony.

6. Obliczyć granicę ciągu (a_n), o ile istnieje, jeśli $a_n =$

a) $\dfrac{2n^3 + 3n^2 + 5n + 1}{5n^3 - 4n^2 + n + 4}$,

b) $1 + \cos\dfrac{n\pi}{2}$,

c) $n(\sqrt{n^2+1} - n)$,

d) $\dfrac{n^5 + 3n + 3}{n^{200} - n^5 + 5}$,

e) $\dfrac{\log_2(n^5 + 3n + 3)}{\log_2(n^{200} - n^5 + 5))}$,

f) $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$,

g) $\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$,

h) $\sin n$.