

Elementy Analizy Matematycznej 2007/2008, ćwiczenia ósme

1. Wyznaczyć przedziały monotoniczności oraz wypukłości lub wklęsłości funkcji f , jej lokalne ekstrema oraz punkty przegięcia. Znaleźć granice funkcji f oraz f' w końcach przedziałów składających się na ich dziedzinę. Naszkicować wykres funkcji f .

a) $f(x) = x^4(1+x)^{-3}$

b) $f(x) = (x+1)^{5/3}(x^2+2x)^{1/3}$. Wiadomo, że $f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{2/3}(x^2+2x)^{-2/3}(7x^2+14x+2)$,

niewymiernymi pierwiastkami f' są $x_5 = -1,845$ oraz $x_6 = -0,155$, ma ona również pierwiastek wymierny,

$$f''(x) = \frac{2}{9}(x+1)^{-1/3}(x^2+2x)^{-5/3}(14x^4+56x^3+61x^2+10x-4),$$

pierwiastkami drugiej pochodnej są $x_1 = 0,177$, $x_2 = -2,177$, $x_3 = -0,492$, $x_4 = -1,508$, są one niewymierne.

c) $f(x) = \frac{x^3-5x}{(5+x^2)^{3/2}}$. Wiadomo, że zachodzą równości

$$f'(x) = \frac{25(x^2-1)}{(5+x^2)^{5/2}}, \quad f''(x) = \frac{-75(x^2-5)}{(5+x^2)^{7/2}}.$$

2. Wiadomo, że kolejnymi pochodnymi funkcji

- tangens w punkcie 0 są liczby 1, 0, 2, 0, 16, 0, 272, ...,

- sinus w punkcie 0 są liczby 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, ...

- ln w punkcie 1 są liczby 1, -1, 2, -6, 24, -120, 720, ...,

- $\sqrt{}$ w punkcie 1 są liczby $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $-\frac{15}{16}$, $\frac{105}{32}$, $-\frac{945}{64}$, $\frac{10395}{128}$.

Obliczyć granice

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x^2) - x \sin x) \cdot \sqrt[100]{1+x^{11}}}{x(\operatorname{tg} x - x)}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}) \cdot \ln \cos x}{\ln(1+x) \cdot (\operatorname{tg}(2x) - 2\operatorname{tg} x) \cdot \sqrt{1+\cos(x^{20})}}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x\sqrt{2})) + x\operatorname{tg} x}{(\sqrt{1+x} - 1) \cdot (x - \sin x)}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^{100}} - 1 - \sin^{50} x}{\sqrt[3]{\ln(1+x - \sin x)}}.$