Zadania na czwarta kartkówkę, Elementy Analizy Matematycznej, 2007/2008.

1. Wyznaczyć granicę ciągu (a_n), jeśli $a_n =$

a) $\dfrac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}$ b) $\dfrac{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}}{\ln n}$

c) $\dfrac{e + \sqrt{e} + \sqrt[3]{e} + \ldots + \sqrt[n]{e}}{n}$ d) $\dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln n}$.

2. Wyznaczyć granicę ciągu (a_n), jeśli $a_n =$

a) $n(\sqrt[n]{2} - 1)$ b) $\left(\dfrac{1 + \sqrt[n]{2}}{2}\right)^n$

c) $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ d) $\left(1 + \dfrac{\cos(n\pi)}{n}\right)^n$.

e) $\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + (-1)^n} - n$ f) $\dfrac{\ln(e^n + 2)}{n}$.

Wskazówka do a): Mamy $\sqrt[n]{2} = e^{\frac{1}{n} \cdot \ln 2}$, odpowiednio przekształcić wyrażenie $n(\sqrt[n]{2} - 1)$ i skorzystać z zadania 2 z poprzedniej kartkówki.

Wskazówka do b): Skorzystać z a).

3. Zbadać zbieżność szeregu

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 + n + 2)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{7^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ d) $\displaystyle\sum_{n=-3}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

e) $\displaystyle\sum_{n=12}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{-n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + \ln n}$.

Wskazówka do d): Skorzystać z zadania 2 z poprzedniej kartkówki.