Zadania na trzecią kartkówkę, Elementy Analizy Matematycznej, 2007/2008.

1. Udowodnić, że

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1,\ q > 0$ ustalone, b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$, d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Wskazówka do a) i b): być może warto skorzystać z nierówności Bernoulliego.

2. Niech (a_n) będzie ciągiem o wyrazach niezerowych, zbieżnym do 0. Udowodnić, że

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$.

Wskazówka: Skorzystać z nierówności z wykładu: dla $|x| < 1$,

$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{1}{1-x}, \qquad \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

3. Wyznaczyć granicę ciągu (a_n) bądź udowodnić, że ciąg jest rozbieżny, jeśli $a_n =$

a) $\frac{n^7 - 1000n^6 - 100n^5 - 2}{n^6 + 2007}$ b) $\frac{(-1)^n + \cos(n!)}{\sqrt{n}}$,

c) $\frac{n\ln n - 12n + \sqrt{n}\sin n}{\ln(\sqrt{n}^n) + 5}$ d) $\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} + 2^n}$.

4. Wyznaczyć granicę ciągu (a_n), jeśli $a_n =$

a) $\left(\frac{n+6}{n+7}\right)^{n+5}$ b) $\left(\frac{n^2+16}{n^2+17}\right)^{n^2+10}$

c) $\left(\frac{n^4+3n+1}{n(n^3+2n+1)}\right)^{n^2}$ d) $\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)^n$