Zadania na dziesiątą kartkówkę, Elementy Analizy Matematycznej, 2007/2008.

1. Wyznaczyć gradient funkcji f w punktach, w których istnieje, jeśli

a) $f(x,y) = \sin(x+e^y)$, b) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^3}$,

c) $f(x,y,z) = x\sqrt{x+2} + y\,\mathrm{tg}z$, d) $f(x,y,z) = \ln(x+y^3\cos z)$.

2. Zbadać ciągłość funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$\text{a) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{jeśli } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{jeśli } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^3+x^2y^3}{x^4+2y^4} & \text{jeśli } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{jeśli } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Zbadać różniczkowalność funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$\text{a) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^4y}{x^2+y^2} & \text{jeśli } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{jeśli } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3+xy^2}{x^2+y^2} & \text{jeśli } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{jeśli } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

4. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji f na zbiorze K, jeśli

a) $f(x,y) = 2x^2 + y$, $K = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 \leq 3\}$,

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $K = \{(x,y) : x^4 + y^4 \leq 2\}$,

c) $f(x,y) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x\sin x + y}$, $K = [0,\pi] \times [0,1]$.