Zadania na drugą kartkówkę, Elementy Analizy Matematycznej, 2007/2008.

1. Rozwiązać równania i nierówności

a) $\log_2 |\sin x| \leq 0,$

b) $2^{\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x} \leq 4, \quad x \in (0,\pi),$

c) $\sin(\sin x) = 0,$

d) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \leq 0, \quad x \in [2\pi, 4\pi].$

2. Udowodnić, że

a) dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi równość

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

b) dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi równość

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2},$$

c) dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 5$ zachodzi nierówność $2^n > n^2$,

d) dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

3. Wyznaczyć granicę ciągu (a_n), jeśli $a_n =$

a) $\dfrac{n^6 + n + \sin n}{3n^6 - 2n + 1}$

b) $\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2$

c) $\dfrac{1 + n\cos(n\pi)}{n+1}$

d) $\dfrac{5n^3 + 3n + 1}{4n^2 - 3n + 5} \cdot (-1)^{n^2+n}$

e) $n(\sqrt[3]{n^3 + n} - n)$

f) $\dfrac{n^2}{1+n^2}\cos\dfrac{2n\pi}{3}.$