Zadania na ósmą kartkówkę, Elementy Analizy Matematycznej, 2007/2008.

1. Obliczyć granice

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{tg}x-\sin 2x}{(\sqrt{1+x^2}-1)^3},$$

$$\text{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\ln(e+x)+3}(\ln(1+x)+\ln(1-x)+\mathrm{tg}(x^2))}{(\sqrt[3]{1+x}-1)^4},$$

$$\text{c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^x-1)\ln(1+\mathrm{arctg}x)}{1-\cos 4x},$$

$$\text{d)}\ \lim_{x\to 0}\frac{(\cos(x\sqrt{2})-1+\sin(x^2))^{10}\ln(1+x^6)}{(e^{x^3}-1-x^3)^{11}}.$$

2. Udowodnić nierówność

a) $\mathrm{tg}3x+\mathrm{tg}3y+\mathrm{tg}3z\geq 3\mathrm{tg}(x+y+z)$ dla $0<x,y,z<\dfrac{\pi}{6}$,

b) $8^a+64^b+64^c\geq 3\cdot 2^{a+2b+2c}$ dla $a,b,c\in\mathbb{R}$,

c) $\sin\alpha\cdot x^4+\cos\alpha\cdot y^4\geq(x\sin\alpha+y\cos\alpha)^4$ dla $\alpha\in(0,\pi/2)$, $x,y\in\mathbb{R}$,

d) $\ln(2x+y)+\ln(2y+z)+\ln(2z+x)\leq\ln(x+y+z)^3$ dla $x,y,z>0$

i rozstrzygnąć, kiedy zachodzi równość.

3. Podać przybliżoną wartość (stosując wielomian Taylora stopnia 1) i oszacować błąd (korzystając z reszty w postaci Lagrange'a).

a) $\ln(0.99)$, b) $e^{0.2}$, c) $\mathrm{arctg}1.01$.