

Zadania na dziewiątą kartkówkę, Elementy Analizy Matematycznej, 2007/2008.

1. Wyznaczyć przedziały monotoniczności oraz wypukłości/wkłęśłości funkcji f oraz granice f i f' na końcach przedziałów składających się na ich dziedzinę.

a) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1,$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1},$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

2. Udowodnić nierówność

a) $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 3y + \operatorname{tg} 3z \geq 3 \operatorname{tg}(x + y + z)$

dla $0 < x, y, z < \frac{\pi}{6},$

b) $8^a + 64^b + 64^c \geq 3 \cdot 2^{a+2b+2c}$

dla $a, b, c \in \mathbb{R},$

c) $\sin \alpha \cdot x^4 + \cos \alpha \cdot y^4 \geq (x \sin \alpha + y \cos \alpha)^4$

dla $\alpha \in (0, \pi/2), x, y \in \mathbb{R},$

d) $\ln(2x + y) + \ln(2y + z) + \ln(2z + x) \leq \ln(x + y + z)^3$

dla $x, y, z > 0$

i rozstrzygnąć, kiedy zachodzi równość.

3. Udowodnić, że

a) $e^x \geq ex$

dla $x \in \mathbb{R},$

b) $xe^{-2} \geq (3x - 4)e^{-x}$

dla $x \in (-2, \infty).$

Kiedy zachodzi równość?