

Kolokwium z Analizy Funkcjonalnej*, 27 listopada 2025

Czas trwania: 120 minut. Z poniższych sześciu zadań należy wybrać pięć. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0-6p.

1. Rozpatrzmy rzeczywistą przestrzeń Hilberta $H = \ell^2$ oraz jej podprzestrzeń

$$K = \left\{ x \in \mathcal{H} : x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6 = \dots = 0 \right\}.$$

Ponadto, określmy $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}$.

- Wyznaczyć rzut prostopadły wektora $x = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 0, 0, 0, \dots)$ na K .
- Obliczyć $\text{dist}(x, K)$.
- Czy $\varphi \in H^*$? Czy $\varphi \in K^*$?

2. Dla $f \in L^4(\mathbb{R})$ zdefiniujmy

$$Tf = \left(\int_0^1 f(x)dx, \int_1^2 f(x)dx, \int_2^3 f(x)dx, \dots \right).$$

Czy T zadaje ograniczony operator z L^4 w c ? Z L^4 w ℓ^1 ? Z L^4 w ℓ^4 ?

3. Niech $C^1[0, 1]$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych z $[0, 1]$ w $\mathbb{R}$, które są różniczkowalne na $(0, 1)$ i których pochodna przedłuża się do funkcji ciągłej na $[0, 1]$. Na przestrzeni tej wprowadźmy normę $\|f\| = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$.

- Wykazać, że przestrzeń wielomianów na $[0, 1]$ jest gęsta w $C^1[0, 1]$.
- Zbadać zbieżność ciągu $f_n(t) = \frac{t^n}{n} - \frac{t^{n+1}}{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, w $C^1[0, 1]$.

4. Załóżmy, że $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest niezerowym funkcjonałem liniowym na rzeczywistej przestrzeni unormowanej X . Wykazać, że jądro $\text{Ker } \varphi$ jest albo domkniętą, albo gęstą podprzestrzenią X .

5. Załóżmy, że X jest przestrzenią wszystkich wielomianów na prostej rzeczywistej o stopniu nie większym niż 2025. Wykazać, że istnieje skończona stała C o tej własności, że dla $f \in X$ mamy

$$|f(100)| \leq C \int_0^1 |f(x)|dx.$$

6. Załóżmy, że Y jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Banacha X . Wykazać, że jeśli Y oraz X/Y są ośrodkowe, to X także jest przestrzenią ośrodkową.