

Kolokwium z Analizy Funkcjonalnej*, 22 stycznia 2026

Czas trwania: 150 minut. Z poniższych sześciu zadań należy wybrać pięć. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0-6p.

1. Niech $X = \{(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2 : a_{2n-1} = a_{2n} \text{ dla } n = 1, 2, \dots\}$.
- (i) Wyznaczyć odległość wektora $a = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots)$ od przestrzeni X .
- (ii) Czy istnieje funkcjonal $\varphi \in \ell_2^*$ o normie 1, spełniający $\varphi(a) = 1$ oraz $\varphi|_X = 0$?

2. Określmy przekształcenie $T: L_2[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ wzorem

$$(Tf)_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{2n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx, \quad n \geq 1.$$

Udowodnić, że $Tf \in c_0$ dla każdego $f \in L_2[-\pi, \pi]$ oraz że T jest ciągłym przekształceniem z $L_2[-\pi, \pi]$ w c_0 . Znaleźć normę tego przekształcenia.

3. Rozstrzygnąć, czy przestrzeń $c \oplus_\infty c$ jest izometryczna z c .

4. Załóżmy, że $1 \leq q \leq p < \infty$ są ustalonymi wykładnikami. Dla jakich funkcji $a: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ operator mnożenia przez a jest ciągłym odwzorowaniem z $L_p(0, 1)$ w $L_q(0, 1)$?

5. Niech X będzie przestrzenią unormowaną, a $V \subset X$ jej domkniętą podprzestrzenią liniową. Załóżmy, że zarówno V , jak i przestrzeń ilorazowa X/V (z normą ilorazową) są przestrzeniami Banacha. Udowodnić, że X jest przestrzenią Banacha.

6. Niech X i Y będą dwiema przestrzeniami Banacha, przy czym $\dim Y < +\infty$. Niech $A: X \rightarrow Y$ będzie operatorem liniowym. Wykazać, że operator A jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jądro operatora A jest zbiorem domkniętym.