

Egzamin z Analizy Funkcjonalnej*, 27 stycznia 2026 r.

Czas trwania: 165 minut.

1. Rozważamy operator $T : L_2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+)$ dany wzorem

$$Tf(x) = (i + \mathbb{1}_{[0,1]}(x))f(x).$$

- (i) Wyznaczyć sprzężenie Hilbertowskie T^* operatora T .
- (ii) Wyznaczyć zbiór wartości własnych operatora $T + T^*$.
- (iii) Wyznaczyć spektrum operatora $T + T^*$. Czy jest to operator zwarty?

2. Wyznaczyć funkcję $f \in L_1(\mathbb{R})$ spełniającą równanie

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)f(x-y)dy - 4 \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{1+y^2}dy + \frac{8\pi}{x^2+4} = 0$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Uwaga: zachodzi tożsamość $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{a}e^{-a|\xi|}$ dla $a > 0$ oraz $\xi \in \mathbb{R}$.

3. Udowodnić, że w nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha X , sfera jednostkowa $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ jest słabo gęstym podzbiorem kuli jednostkowej $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.

4. W rzeczywistej przestrzeni $(c_{00}, \|\cdot\|_{\infty})$ rozpatrujemy podzbiory

$$A = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 1} \in c_{00} : \text{ostatni niezerowy wyraz ciągu } x \text{ jest dodatni} \right\},$$

$$B = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 1} \in c_{00} : \text{ostatni niezerowy wyraz ciągu } x \text{ jest ujemny} \right\}.$$

- (i) Dowieść, że A i B są zbiorami wypukłymi.
- (ii) Dowieść, że **nie istnieje** niezerowy funkcjonał $\varphi \in c_{00}^*$ spełniający

$$\inf_{x \in A} \varphi(x) \geq \sup_{y \in B} \varphi(y).$$

5. Niech T będzie liniowym przekształceniem przestrzeni Banacha X w $L_1[0,1]$. Załóżmy, że dla dowolnego zbioru mierzalnego $A \subset [0,1]$ przekształcenie $x \mapsto \int_A Tx(t)dt$ jest ciągłym funkcjonałem liniowym na X . Dowieść, że operator T jest ciągły.

6. Dany jest operator samosprężony T na pewnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, spełniający warunek $\|Tx\| \geq \|x\|$ dla wszystkich $x \in \mathcal{H}$.

- (i) Wykazać, że T jest odwracalny oraz $\sigma(T^{-1}) \subseteq [-1, 1]$.
- (ii) Wykazać, że $\sigma(T) \cap (-1, 1) = \emptyset$.