

Zadania na kartkówkę z Analizy Funkcjonalnej - seria 4

1. Wyznaczyć operator (banachowsko) sprzężony do operatora $T \in \mathcal{B}(X)$ zadanego przez:

- $X = C[0, 1]$, $Tf = f \circ \varphi$, gdzie $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ jest ustaloną funkcją ciągłą;
- $X = L_2[0, 1]$, $Tf = fg$, gdzie $g \in L_\infty[0, 1]$ jest ustaloną funkcją;
- $X = c_0$, $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \dots)$.

2. Niech $1 \leq p < \infty$ będzie ustalonym wykładnikiem. Wykazać, że włożenie $\ell_p \subset c_0$ jest ciągłe. Czy jest ono przekształceniem zwartym?

3. Rozważmy operator T , działający na funkcjach określonych na $[0, 1]$ wzorem $Tf(x) = \int_0^x f(s) ds$. Czy jest to operator zwarty jako operator z $L_1[0, 1]$ w $C[0, 1]$?

4. Niech $\alpha \in (0, 1)$ będzie ustalonym parametrem. Dowieść, że operator $T : C(0, 1) \rightarrow C(0, 1)$, dany wzorem $Tf(x) = \int_0^1 \frac{f(y)}{|x - y|^\alpha} dy$, jest zwarty.

5. Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami Banacha. Wykazać, że zwarty operator liniowy $T : X \rightarrow Y$ ma domknięty obraz wtedy i tylko wtedy, gdy $T(X)$ ma skończony wymiar.

6. Wyznaczyć sprzężenie Hilbertowskie operatora $T : L_2(0, \infty) \rightarrow L_2(0, \infty)$ danego wzorem $Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy$. Czy T jest zwarty?

7. Wyznaczyć spektrum operatora $S : \ell_1 \rightarrow \ell_1$ danego wzorem

$$Sx = (x_1 + x_2 + x_3 + \dots, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

8. Podać przykład operatora $T \in \mathcal{B}(\ell_2)$ dla którego $\sigma(T) = \{0, 1\}$ i $\sigma_p(T) = \emptyset$.

9. Niech $1 \leq p \leq \infty$ oraz niech $(a_n)_{n=1}^\infty$ będzie rosnącym ciągiem liczb dodatnich takim, że $r = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty$. Definiujemy $A \in \mathcal{B}(\ell_p)$ wzorem

$$A(x_1, x_2, \dots) = (0, a_1 x_1, a_2 x_2, \dots).$$

Wykazać, że $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r\}$ oraz $\sigma_p(A) = \emptyset$. Dowieść, że jeśli $|\lambda| < r$, to obraz $A - \lambda I$ jest domknięty i ma kowymiar 1.

10. Załóżmy, że A jest nieujemnym operatorem ciągłym na pewnej przestrzeni Hilberta. Dowieść, że dla dowolnego $n \geq 1$ operator A^n jest nieujemny.

11. Załóżmy, że T jest zwartym, samosprzężonym operatorem na pewnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wykazać, że istnieje zwarty operator $S \in \mathcal{B}(H)$ spełniający równanie $S^3 + S = T$.

12. Rozważamy równanie $(\lambda I - T)x = y$, $\lambda \neq 0$, gdzie T jest zwartym samosprzężonym operatorem na pewnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Niech $(e_n)_{n \geq 1}$ będzie bazą ortonormalną złożoną z wektorów własnych T odpowiadających wartościom własnym $(\lambda_n)_{n \geq 1}$.

a) Wykazać, że jeśli $\lambda \notin \sigma_p(T)$, to dla dowolnego $y \in \mathcal{H}$ istnieje rozwiązanie $x \in \mathcal{H}$ równania $(\lambda I - T)x = y$, i jest ono dane wzorem

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, e_n \rangle}{\lambda - \lambda_n} e_n.$$

b) Dowieść, że jeśli $\lambda \in \sigma_p(T)$, to równanie $(\lambda I - T)x = y$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $y \perp \text{Ker}(\lambda I - T)$; rozwiązanie to dane jest wzorem

$$x = \sum_{n: \lambda \neq \lambda_n} \frac{\langle y, e_n \rangle}{\lambda - \lambda_n} e_n.$$