

Zadania na kartkówkę z Analizy Funkcjonalnej - seria 3

1. Wyznaczyć przestrzeń sprzężoną do przestrzeni

$$X = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{C} : \|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n|x_n|^3 \right)^{1/3} < \infty \right\}.$$

2. Niech B będzie domkniętym i wypukłym podzbiorem zespolonej przestrzeni unormowanej X , spełniającym tzw. warunek zbalansowania:

$$\text{jeśli } x \in B \text{ oraz } |\lambda| \leq 1, \text{ to } \lambda x \in B.$$

Wykazać, że dla każdego $x_0 \in X \setminus B$ istnieje funkcjonal $\varphi \in X^*$ taki, że $\varphi(x_0) > 1$ oraz $|\varphi(x)| \leq 1$ dla każdego $x \in B$.

3. Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $\{T_n\}_{n \geq 1}$ będzie ciągiem operatorów ograniczonych na H spełniającym warunek

$$\sup_{n \geq 1} |\langle T_n x, y \rangle| < +\infty \quad \text{dla wszystkich } x, y \in H.$$

Wykazać, że $\sup_{n \geq 1} \|T_n\| < +\infty$.

4. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ jest zbieżny dla każdego ciągu $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżnego do zera wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$.

5. Ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^2[0, 1]$ spełnia warunek $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t)g(t)dt = 0$ dla wszystkich funkcji $g \in L^2[0, 1]$. Wykazać, że $\sup_n \|f_n\|_2 < \infty$. Czy musi zachodzić $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = 0$?

6. Wykazać, że ciąg funkcji Rademachera $r_k := \text{sgn}(\sin 2^k \pi x)$ jest słabo zbieżny do zera w $L^p[0, 1]$ dla $1 \leq p < \infty$.

7. Rozważamy ciąg $(x_n)_{n \geq 1} \subset \ell_{\infty}$, gdzie

$$x_n = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, 0, 0, 0, \dots).$$

n jedynek

Udowodnić, że $(x_n)_{n \geq 1}$ zbiega słabo* do $(1, 1, 1, \dots)$, ale nie zbiega słabo.

8. Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $(x_n)_{n \geq 1} \subset H$ będzie ciągiem zbieżnym słabo do $x \in H$. Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

- (i) $(x_n)_{n \geq 1}$ zbiega silnie (tj. w normie) do x .
- (ii) $(\|x_n\|)_{n \geq 1}$ zbiega do $\|x\|$.

9. Ustalmy $p \in (1, \infty)$. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłą i spełnia warunek

$$\text{jeśli } u_n \rightarrow u \text{ słabo w } L_p(0, 1), \quad \text{to} \quad f \circ u_n \rightarrow f \circ u \text{ słabo w } L^p(0, 1).$$

Dowieść, że f jest funkcją afiniczną. *Wskazówka: modyfikować funkcje z zadania 6.*

10. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie refleksywną przestrzenią unormowaną, a $\emptyset \neq K \subseteq X$ zbiorem domkniętym i wypukłym. Wykazać, że dla każdego $x \in X$ istnieje najlepsze przybliżenie w K , tzn. $y \in K$, takie że $\|x - y\| = d(x, K) := \inf\{\|x - z\| : z \in K\}$.

11. Dla $n \geq 1$, rozważamy funkcjonal liniowy $\varphi_n \in (\ell_{\infty})^*$ dany wzorem $\varphi_n(x) = x_n$, gdzie $x = (x_k)_{k \geq 1} \in \ell_{\infty}$.

a) Dowieść, że $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ jest podzbiorem kuli jednostkowej w ℓ_{∞}^* , ale z ciągu $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ nie da się wybrać podciągu słabo* zbieżnego.

b) Czy funkcjonal zerowy z $(\ell_{\infty})^*$ jest punktem skupienia, w słabej* topologii, ciągu $(\varphi_n)_{n \geq 1}$?

c) Korzystając z twierdzenia Banacha-Alaoglu, wykazać, że istnieje $\varphi \in \ell_{\infty}^*$ będący punktem skupienia ciągu $(\varphi_n)_{n \geq 1}$. Pokazać, że $\varphi \neq \hat{\psi}$ dla dowolnego $\psi \in \ell_1$, gdzie $\hat{\psi}$ jest obrazem elementu ψ przy naturalnym zanurzeniu ℓ_1 w $(\ell_1)^{**} = \ell_{\infty}^*$.

12. Niech X będzie przestrzenią Banacha. Wykazać, że przekształcenie liniowe $T : X \rightarrow C[0, 1]$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \in [0, 1]$, przekształcenie $x \mapsto Tx(t)$ jest ciągłym funkcjonałem na X .

13. Załóżmy, że $T : X \rightarrow Y$ jest różnowartościowym przekształceniem liniowym ciągłym pomiędzy dwiema przestrzeniami Banacha X i Y . Dowieść, że jeśli $T(X)$ jest domkniętą podprzestrzenią Y , to istnieje skończona stała dodatnia β taka, że $\|Tx\|_Y \geq \beta\|x\|_X$ dla wszystkich $x \in X$.