

Zadania na kartkówkę z Analizy Funkcjonalnej - seria 2

1. Załóżmy, że T jest operatorem ograniczonym na przestrzeni Banacha X . Wykazać, że jeśli $(a_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{C}$, $(x_n)_{n \geq 1} \subset X$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ jest zbieżny w X , to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n T x_n$ także zbiega w X i $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T x_n$.

2. Niech

$$M := \left\{ f \in L^1[0, 1] : \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}.$$

Wykazać, że M jest domkniętą podprzestrzenią $L^1[0, 1]$. Dla $g \equiv 1$, obliczyć $\text{dist}(g, M)$. Czy istnieje funkcja $f \in M$ taka, że $\text{dist}(g, M) = \|f - g\|$? Ile jest takich funkcji?

3. Wykazać, że $c/c_0 \simeq \mathbb{F}$. Czy $c_0/\ell_2 \simeq \mathbb{F}^n$ dla pewnej liczby naturalnej n ?

4. W przestrzeni ilorazowej $E = L_\infty([-1, 1])/C([-1, 1])$, obliczyć normę wektora $[f]$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} |x|/x & \text{dla } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Co jeśli przestrzeń E zastąpimy przestrzenią $L_2([-1, 1])/C([-1, 1])$?

5. Niech H będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta, a $V \subseteq H$ — gęstą podprzestrzenią. Wykazać, że V zawiera ortonormalną bazę przestrzeni H .

6. Rozstrzygnąć, czy przestrzeń $C[0, 1]$ z normą supremum jest przestrzenią Hilberta.

7. Niech H_n będzie układem wielomianów Hermite'a, danym wzorem:

$$H_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2/2}).$$

Wykazać, że jest to układ ortogonalny w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}, e^{-t^2/2} dt)$.

8. Dana jest rodzina funkcjonałów $(\varphi_i)_{i \in I} \subset H^*$ o tej własności, że dla dowolnego $x \in H$, zbiór $\{\varphi_i(x) : i \in I\}$ jest ograniczony. Wykazać, że zbiór $\{\|\varphi_i\| : i \in I\}$ jest ograniczony.

9. Niech $H = L^2([0, 1])$ oraz

$$M = \left\{ f \in L^2([0, 1]) : \int_0^1 x f(x) dx = 0 \right\}.$$

a) Pokazać, że M jest domkniętą podprzestrzenią liniową przestrzeni H .

b) Przedstawić wektor $f(x) = 1$ w postaci $f = f_M + (f - f_M)$, gdzie $f_M \in M$ oraz $f - f_M \in M^\perp$.

c) Wyznaczyć odległość $\text{dist}(f, M)$.

10. Wykazać, że dla $1 \leq p \leq \infty$, $L_p([0, 1])$ zawiera podprzestrzeń izometryczną z ℓ_p .

11. Wykazać, że dla $1 \leq p \leq \infty$, przestrzenie $L_p([0, 1])$ oraz $L_p(\mathbb{R})$ są izometryczne.

12. Niech $1 \leq p \leq \infty$ będzie ustalonym parametrem. Czy istnieje funkcjonał $\varphi \in (\ell_p)^*$ spełniający warunek $\|\varphi\|_{(\ell_p)^*} \leq 1$ oraz $\varphi((1, 0, 0, \dots)) = \varphi((1, 1, 0, 0, \dots)) = 1$?

13. Załóżmy, że E jest przestrzenią unormowaną, a F jest jej podprzestrzenią liniową. Przypuśćmy, że nie istnieje niezerowy funkcjonał $\varphi \in E^*$ spełniający warunek $\varphi|_F = 0$. Dowieść, że F jest gęste w E .

14. Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha, $V \subset X$ jest domkniętą podprzestrzenią oraz $x_0 \in X \setminus V$. Dowieść, że $\text{lin}\{x_0, V\}$ jest domkniętą podprzestrzenią X .