

Zadania na kartkówkę z Analizy Funkcjonalnej I* - seria 1

1. Wykazać, że przestrzeń $C_0(\mathbb{R}^d)$ funkcji ciągłych znikających w nieskończoności (tzn. spełniających warunek $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = 0$), wyposażona w normę supremum, jest przestrzenią Banacha.

2. Rozstrzygnąć, czy na c_{00} można wprowadzić strukturę przestrzeni Banacha.

3. Niech $C^1[0, 1]$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych z $[0, 1]$ w $\mathbb{R}$, które są różniczkowalne na $(0, 1)$ i których pochodna przedłuża się do funkcji ciągłej na $[0, 1]$. Rozważmy normy

(i) $|f(0)| + \|f'\|_\infty$;

(ii) $\|f\|_\infty + \sup_{x \in (0, 1)} |xf'(x)|$.

Które z tych norm wprowadzają na $C^1[0, 1]$ strukturę przestrzeni Banacha?

4. Niech X będzie przestrzenią unormowaną i niech $U \subseteq X$ będzie niepustym zbiorem otwartym. Wykazać, że otoczka wypukła $\text{conv } U$ również jest otwarta. (Określamy $\text{conv } U = \bigcap V$, gdzie przecięcie jest wzięte po wszystkich zbiorach wypukłych V zawierających U).

5. Rozpatrujemy przestrzenie $L_p[0, 1]$ oraz $L_p[0, \infty)$ z miarą Lebesgue'a. Niech $1 \leq p < q$.

a) Znaleźć funkcję $f \in L_p[0, 1]$ taką, że $\|f\|_q = \infty$.

b) Znaleźć funkcję $f \in L_p[0, \infty)$ taką, że $\|f\|_q = \infty$.

c) Znaleźć funkcję $f \in L_q[0, \infty)$ taką, że $\|f\|_p = \infty$.

6. Załóżmy, że $1 \leq p < \infty$. Niech $(f_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem w $L^p(X)$ oraz niech $(g_n)_{n \geq 1}$ będzie ograniczonym ciągiem w $L^\infty(X)$. Załóżmy, że $f_n \rightarrow f$ w L^p oraz $g_n \rightarrow g$ prawie wszędzie. Udowodnić, że $f_n g_n \rightarrow f g$ w $L^p(X)$.

7. Niech X będzie przestrzenią wielomianów rzeczywistych na półprostej $[0, \infty)$. Dla $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ określamy normę na dwa sposoby:

$$\|f\|_1 := \sum_{k=0}^n |a_k|, \quad \|f\|_2 = \sup_{x \geq 0} |f(x)|e^{-x}.$$

Czy zachodzi warunek $\|\cdot\|_1 \leq C\|\cdot\|_2$ dla pewnej stałej C ? Czy zachodzi warunek $\|\cdot\|_2 \leq C\|\cdot\|_1$ dla pewnej stałej C ?

8. Określamy operator $T : \ell^1 \rightarrow \ell^\infty$ wzorem $T(x)_n = \sum_{k=n}^\infty x_k/2^k$, $n = 1, 2, \dots$, dla $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in \ell^1$. Dowieść, że T jest ciągły i wyznaczyć jego normę.

9. Wykazać ciągłość oraz wyznaczyć normę przekształcenia $T : C(0, 2) \rightarrow L^2(0, 2)$ danego wzorem $Tf(x) = f(\sqrt{x}) \sin x$, $x \in (0, 2)$.

10. Wykazać, że $\varphi(f) = f(0) + f(1) + \int_0^{1/2} f(x^2) dx$ jest ciągłym funkcjonałem na $C(0, 1)$ i wyznaczyć jego normę.

11. Dowieść, że jeśli $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha, to każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny (tzn. jeśli $\sum_{n \geq 0} \|x_n\| < \infty$, to ciąg $(\sum_{n=0}^N x_n)_{N \geq 0}$ zbiega w X).

12. Rozważmy podprzestrzeń $X \subset \ell_4$ daną wzorem

$$X = \left\{ x \in \ell_4 : \sum_{n=1}^\infty x_n = 0 \right\}.$$

Dla jakich $p \in [1, \infty]$ przestrzeń X z normą $\|\cdot\|_p$ jest przestrzenią Banacha?