

Dodatkowe zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 5

1. Dany jest operator ciągły T na przestrzeni Banacha X , spełniający warunek $p(T) = 0$ dla pewnego wielomianu $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$. Udowodnić, że spektrum operatora T jest zawarte w zbiorze pierwiastków wielomianu $p(z)$.

2. Dany jest operator zwarty T na pewnej przestrzeni Hilberta. Wykazać, że równanie $Tx = x$ ma niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $T^*x = x$ ma niezerowe rozwiązanie. Dowieść, że obie przestrzenie rozwiązań mają ten sam wymiar.

Uwaga: T^* oznacza tu sprzężenie hilbertowskie.

3. Dany jest operator samosprężony T na pewnej przestrzeni Hilberta. Udowodnić, że $\|T^n\| = \|T\|^n$ dla każdego $n \geq 1$.

4. Dla ustalonej funkcji ciągłej $K : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$, określamy operator

$$Af(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy.$$

Wiadomo z wykładu, że A jest operatorem zwartym na $C[0, 1]$. Wyznaczyć $\sigma(A)$.